

Α ΜΕΡΟΣ – ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 01/09/2018

ΥΛΗ

Από το σχολικό βιβλίο του Ο.Ε.Δ.Β., «Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής-Β' ΜΕΡΟΣ»:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: Όριο-συνέχεια συνάρτησης

Από σελίδα 11: 1.1 Πραγματικοί αριθμοί, έως και σελίδα 64: 1.7 Όριο συνάρτησης στο άπειρο, και

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: Διαφορικός Λογισμός

Από σελίδα 91: 2.1 Η έννοια της παραγώγου, έως και σελίδα 111: 2.3 Κανόνες Παραγώγισης

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Α. ΘΕΩΡΙΑ

1. Από το βιβλίο της **ΘΕΩΡΙΑΣ** του Φροντιστηρίου μας:
Τα **Θεωρήματα** Θ.6 και Θ.7 στη σελίδα 3 και τα Θ.9 έως Θ.13 και Θ.16 έως Θ.21 στις σελίδες 11 έως 14.
Τους **Ορισμούς-Προτάσεις**: από 1 έως 47 στις σελίδες 4 έως 9 και από 1 έως 4 στη σελίδα 18 καθώς και από 8 έως 14 στις σελίδες 18 έως 19.
2. Τις ερωτήσεις **Σωστού- Λάθους** στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας που αντιστοιχούν στην παραπάνω ύλη και υπάρχουν στα βιβλία του Φροντιστηρίου μας:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ Ι «ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ» και
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΙΙ «ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ»

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Από το **Σχολικό βιβλίο**, «Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής», **να λύσετε τις ασκήσεις**:
Παρ 1.2: Α' Ομάδα: 1, 2, 3, 7, 9, 11, 12 & Β' Ομάδα: 6, 7, 8
Παρ 1.3: 1,2,3,4
Παρ 1.4 : 4, 5
Παρ 1.5 : Α' Ομάδα 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 & Β' Ομάδα: 1, 2, 4
Παρ 1.6: Α' Ομάδα 1,2 & Β' Ομάδα 1,2,3,4
Παρ 1.7: Α' Ομάδα 1,2,3 & Β' Ομάδα 4
Παρ 2.1: Α' Ομάδα 1,2,3,4,5 & Β' Ομάδα 1,2,3,4,5,6,7,8
Παρ 2.2: Α' Ομάδα 1,2 & Β' Ομάδα 1
Παρ 2.3: Α' Ομάδα 1,2,3,4,6,12,13,14,15 & Β' Ομάδα 5,7,9
2. **Να λύσετε τα 16 Θέματα που ακολουθούν στο Β' Μέρος της παρούσης Εργασίας 1.**

Παρατήρηση

Για να αντιμετωπίσετε τόσο τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου όσο και τα 16 Θέματα της Εργασίας 1, να **συμβουλευτείτε τα λυμένα παραδείγματα** που αντιστοιχούν στην παραπάνω ύλη και που υπάρχουν στα βιβλία του Φροντιστηρίου μας **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ Ι «ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ»** και **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΙΙ «ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ»**

Προσοχή:

Επιβάλλεται να ξεκινήσετε την προετοιμασία σας για το διαγώνισμα του Σαββάτου 1 Σεπτεμβρίου 2018 **τουλάχιστον μία εβδομάδα πριν.**

Να ξεκινήσετε την προετοιμασία σας από τις Ασκήσεις (τόσο του σχολικού βιβλίου όσο και τα 16 Θέματα της Εργασίας 1) **και κατόπιν να ασχοληθείτε με τη Θεωρία.**

Οι **λύσεις των 16 θεμάτων της Εργασίας 1**, θα είναι διαθέσιμες την Πέμπτη 30 Αυγούστου 2018 και θα αναρτηθούν στο [Blog](#) μας.

Προφανώς τα 16 Θέματα της Εργασίας 1, θα πρέπει **να τα έχετε λύσει ή να τα έχετε δει και κατανοήσει από τις λύσεις τους, το αργότερο το βράδυ της Παρασκευής 31 Αυγούστου 2018**, αλλιώς δεν έχει νόημα ο ρόλος της Εργασίας 1 ως προετοιμασία για το διαγώνισμα των Μαθηματικών το Σάββατο 1 Σεπτεμβρίου 2018.

Το σχολικό βιβλίο μπορείτε να το βρείτε στον παρακάτω σύνδεσμο:

<http://ebooks.edu.gr/new/>

B ΜΕΡΟΣ - ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in R.$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} , αν γνωρίζετε ότι $f(R) = R$.

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(x-3) < x$

β. $f^{-1}(x) < e^x - 1$

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την $C_{f^{-1}}$

Δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την $C_{f^{-1}}$

(Απάντηση: Β. α. $x > 1$, β. $x > 0$ Γ. Α(0,0) Δ. $x < 0$)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha - \ln x - \ln^2 x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

A. Να προσδιορίσετε την τιμή του α .

Αν $\alpha = 2$:

B. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1}{x^3} + 3$. Να βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f και g .

Δ. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \ln \frac{x}{e}$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $g(x) - f(x)$ και $h^2(x)$ είναι ίσες.

(Απάντηση: Β. $x \in (\frac{1}{e^2}, e)$, Γ. Α(e,0))

3. Έστω συνάρτηση f ώστε: $2f^3(x) + 3f(x) + e^{f(x)} = -x^3 + 1$, για κάθε $x \in R$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = f(1-x) - f(x-1)$, $x \in R$ είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: $f(g(x^3 + x)) > f(g(2 - \ln x))$.

(Απάντηση: Γ. $x \in (0,1)$)

4. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $x \in (0,10)$

Β. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$

Γ. Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ίσο με $\frac{25}{2}$ (δηλαδή μέγιστο);

Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

(Απάντηση: Γ. $x = 5$)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$f^3(x) + 2f(x) = -x^3 + 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

β. Η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την $f^{-1}(x)$, αν γνωρίζετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

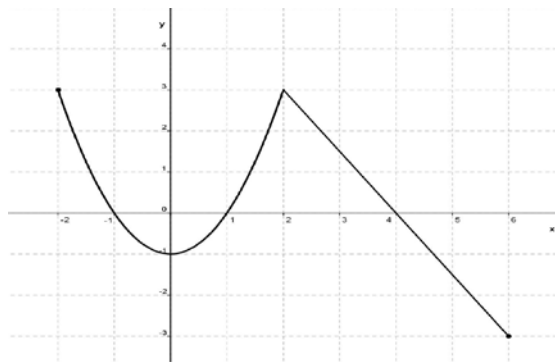
γ. Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 2f(2-3x) + (f \circ f)(2+2x) + 2016$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Β. Για $x > 0$, να λυθεί η εξίσωση

$$2(f(5-3x^2) - f(2-6\ln x)) = f(f(2+4\ln x)) - f(f(2x^2))$$

(Απάντηση: Α.β. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x^3 - 2x + 3}, & x \leq 1 \\ -\sqrt[3]{x^3 + 2x - 3}, & x > 1 \end{cases}$, Β. $x = 1$)

6. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Δ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Ε. Να υπολογίσετε τα όρια (αν υπάρχουν):

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) + 1}$$

7. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x\sqrt{x} - x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

(Απάντηση: $\alpha. -4$, $\beta. -1$, $\gamma. 0$, $\delta. 12$, $\epsilon. 2$, $\sigma\tau. \frac{7}{2}$, $\zeta. 3$, $\eta.$ δεν υπάρχει)

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x^3 - x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f^2(x) + 9} - 3}{\eta\mu x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + xf(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta\mu^2 x}$$

(Απάντηση: $\alpha. 0$, $\beta. -2$, $\gamma. 0$, $\delta. \frac{13}{11}$)

9. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x + \eta\mu 4x + \eta\mu 6x - \eta\mu 12x}{x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$$

(Απ.α.0. $\beta. -1$, $\gamma. 4$, $\delta. 0$)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$x - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$A. f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 \text{ και } f'(-1) = 1$$

$$B. \lim_{x \rightarrow -1} (3f(x) - 2f(-2-x)) = -2$$

$$Γ. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(f(x) + 2)}{\sqrt{-2f(x)} - 2} = -2$$

$$Δ. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)[f(x) - 2x + 1] + x(x-1)}{x-1 + |f(x)|} = 1$$

11. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, \alpha)$ και $B(3, -\beta)$, όπου τα $\alpha, \beta \in R$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = \alpha$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{\beta}{3}$.

A. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

B. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(2\ln x + 3) + 6) < 1$.

(Απ. A. $\alpha=1, \beta=5$. B. $x \in (0, 1)$)

12. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x+1}{|x+1|}$

B. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$

Γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+2x+1} + 2x)$

Δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^x) - 2x)$

(Απαντήσεις: A. $-\infty$, B. δεν υπάρχει, Γ. $-\frac{1}{2}$, Δ. $-\infty$)

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + \alpha x + 1, x \in R$. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα σημείο με τεταγμένη -1 .

A. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

B. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1}(3) = 1$

Γ. Να λύσετε:

α. τις εξισώσεις $f(x) = 35$ και $f^{-1}(x) = 2$

β. την ανίσωση $f(f(|x|-2)-4) < f^{-1}(-1)$

γ. την εξίσωση $(3e^x - 1)^5 + 3e^x = 35$

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

(Απαντήσεις: Γ.α. $x=2, x=35$, Γ.β. $-3 < x < 3$, Γ.γ. $x=0$, Δ. $y = 6x - 3$)

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+4}{2}, & x \geq 0 \\ \frac{1+2x-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε, αν ορίζεται, την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τεταγμένη $x_0 = 0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} να δείξετε ότι

A. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+3y) - f(x)}{y} = 3f'(x)$

B. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+2y) + f(x-4y) - 2f(x)}{y} = -2f'(x)$

Γ. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+5y) - f(x-3y)}{y} = 8f'(x)$

(Υπόδειξη: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} είναι και συνεχής στο \mathbb{R} , άρα:

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) \text{ και } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f'(x) \dots)$$

16. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$, για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις

A. $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$

B. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

Γ. $f(x) = e^{(x^2+x+1)^2}$

Δ. $f(x) = (2x^3 + e^x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu(x^2))$