

**Α ΜΕΡΟΣ – ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ  
ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 04/11/2017**

**ΥΛΗ**

Από το σχολικό βιβλίο του **Ο.Ε.Δ.Β.**, «Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής - Β' Μέρος»

**1. ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

Από σελίδα 11: 1.1 Πραγματικοί αριθμοί, έως και σελίδα 75: 1.8 Θεώρημα Bolzano και πρόσημο συνάρτησης

**2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Από σελίδα 91: 2.1 Η έννοια της παραγώγου, έως και σελίδα 125:2.4 Ρυθμός Μεταβολής

**ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

**Α. ΘΕΩΡΙΑ**

1. Από το βιβλίο της **ΘΕΩΡΙΑΣ** της **Μετάβασης** στη σελίδα 3 τα **Θεωρήματα** Θ.6 και Θ7. Τα Θεωρήματα Θ9 ως και Θ21 στις σελίδες 11 έως 14. Τους **ορισμούς-προτάσεις**: από 1 έως 58 στις σελίδες 4 έως 10, τους **ορισμούς-προτάσεις**: από 1 έως 17 στις σελίδες 18 έως 19 .
2. Τις ερωτήσεις **Σωστού- Λάθους** στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας που αντιστοιχούν στην παραπάνω ύλη και υπάρχουν στο βιβλίο της **Μετάβασης** "**ΤΟΜΟΣ Α -ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ**" και "**ΤΟΜΟΣ Β -ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**"
3. Τις ερωτήσεις **Κατανόησης** στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας που αντιστοιχούν στην παραπάνω ύλη και υπάρχουν στο **σχολικό βιβλίο του Ο.Ε.Δ.Β.**, «Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής - Β' Μέρος»

**Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Από το **σχολικό βιβλίο**, «Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Β' Μέρος», **να λύσετε τις ασκήσεις**:  
σελ. 63 έως και 64: Α' Ομάδα: 1, 2 & Β' Ομάδα: 1,2,3,4  
σελ. 68 έως και 69: Α' Ομάδα: 1, 2,3 & Β' Ομάδα: 1,2,4  
σελ. 79 έως και 83: Α' Ομάδα: 1, 2,4,5,6,7,8,9 & Β' Ομάδα: 1,2,3,4,5,7  
σελ. 102 έως και 104: Α' Ομάδα: 1,2,3, 4, 5 & Β' Ομάδα: 1, 2,3,4,5,6,7,8  
σελ. 109 έως και 110: Α' Ομάδα: 1,2,3 & Β' Ομάδα: 1, 2,3,4  
σελ. 120 έως και 123: Α' Ομάδα: 1 ως 15 & Β' Ομάδα: 1 ως 11  
σελ. 125 έως και 127: Α' Ομάδα: 4,5 & Β' Ομάδα: 2,3,5,7,8

**2. Να λύσετε τα 12 Θέματα που ακολουθούν στο Β' Μέρος της παρούσης εργασίας.**

**Παρατήρηση**

Για να αντιμετωπίσετε τόσο τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου όσο και τα 12 Θέματα της *Εργασίας 2*, να **συμβουλευτείτε τα λυμένα παραδείγματα** που αντιστοιχούν στην παραπάνω ύλη και που υπάρχουν στο βιβλίο της *Μετάβασης "ΤΟΜΟΣ Α -ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ"* και *"ΤΟΜΟΣ Β -ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ"*

**Προσοχή:**

Επιβάλλεται να ξεκινήσετε την προετοιμασία σας για το διαγώνισμα του Σαββάτου 04 Νοεμβρίου 2017 **τουλάχιστον μία εβδομάδα πριν.**

**Να ξεκινήσετε** την προετοιμασία σας **από τις Ασκήσεις** ( τόσο του σχολικού βιβλίου όσο και τα 12 Θέματα της *Εργασίας 2*) **και κατόπιν** να ασχοληθείτε με τη **Θεωρία**.

Οι **λύσεις των 12 θεμάτων της εργασίας**, θα είναι διαθέσιμες την Τετάρτη 1 Νοεμβρίου 2017 και θα αναρτηθούν στο [Blog](#) του φροντιστηρίου. Προφανώς τα 12 Θέματα της *Εργασίας 2*, θα πρέπει **να τα έχετε λύσει ή να τα έχετε δει και κατανοήσει από τις λύσεις τους, το αργότερο το βράδυ της Παρασκευής 03 Νοεμβρίου 2017**, αλλιώς δεν έχει νόημα ο ρόλος της *Εργασίας 2* ως προετοιμασία για το διαγώνισμα των Μαθηματικών το Σάββατο 04 Νοεμβρίου 2017.

**Β ΜΕΡΟΣ - ΘΕΜΑΤΑ**

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + ax + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει την ευθεία  $y = x$  σε ένα σημείο με τεταγμένη  $-1$ .
- A.** Να δείξετε ότι  $a=1$ .
- B.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και ότι  $f^{-1}(3) = 1$
- Γ.** Να λύσετε:
- α)** τις εξισώσεις  $f(x) = 35$  και  $f^{-1}(x) = 2$
- β)** την ανίσωση  $f(f(|x|-2)-4) < f^{-1}(-1)$
- γ)** την εξίσωση  $(3e^x - 1)^5 + 3e^x = 35$
- Δ.** να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_{f^{-1}}$  στο σημείο  $A(3, f^{-1}(3))$

(Απαντήσεις: **Γ.α)**  $x=2, x=35$ , **Γ.β)**  $-3 < x < 3$ , **Γ.γ)**  $x=0$ , **Δ.**  $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$ )

2. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)x^2 - f(2)x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$
- A.** Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$  και  $f(2)$  και να υπολογίσετε τον αριθμό  $f^{-1}(f^{-1}(3))$ .
- B.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(f^{-1}(x^2 - 1)) = 1$ .

**Γ.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} - (f(3))^x}{5^x + (f(3))^{x+1}} = f(3) - 2$ ,  $f(3) > 0$  και γνωρίζουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -f(3)$  τότε να υπολογίσετε

**α)** τις τιμές  $f(0)$  και  $f(3)$  **β)** το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi(f(x) + 8))}{f(x) + 7}$

(Απάντηση: **B.**  $x = 2$  ή  $x = -2$ , **Γ.α)**  $f(0) = -7$  και  $f(3) = 7$  **B.β)**  $-\pi$ )

3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$x(f(x) - \sqrt{x^2 + 4}) = \eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- A.** Να βρείτε την τιμή  $f(0)$  και τον τύπο της  $f$ .
- B.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$  και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .
- Γ.** Να βρείτε την  $f'(x)$  και να αποδείξετε ότι η  $f'$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- Δ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ .

(Απάντηση: **A.**  $f(0) = 2$ , **B.**  $y = x + 2$ , **Δ.**  $-1$ )

4. Έστω συνάρτηση  $f : R \rightarrow R$  παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε  $f(1) = 2$  και  $f^2(x) \geq 4x$  για κάθε  $x \in R$ . Να δείξετε ότι:

A.  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot (f(x) + f(1)) \geq 4$ , για κάθε  $x > 1$  και ότι

$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot (f(x) + f(1)) \leq 4$ , για κάθε  $x < 1$

- B. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(1,2)$  σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Γ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 2x}{x - 1} = 3$

5. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$  και  $g(x) = -x^2 - \gamma x - 2$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ . Αν η ευθεία  $y = x - 5$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$  και τέμνει κάθετα την εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο  $B(0, g(0))$ , τότε:

- A. Να δείξετε ότι  $\alpha = -3, \beta = -1$  και  $\gamma = 1$ .

- B. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της  $f$ , που διέρχονται από το σημείο  $B(1, -7)$ .

- Γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων των  $C_f, C_g$ .

(Απάντηση: B.  $y = -5x - 2$  και  $y = 3x - 10$ , Γ.  $y = -3x - 1$  και  $y = -x - 2$ )

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : R \rightarrow R$ , για την οποία ισχύει:

$$f(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + x - 1 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- A. Να δείξετε ότι  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$ .

- B. Αν γνωρίζετε ότι η  $f'$  είναι συνεχής, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x) - \eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

(Απάντηση: A.  $y = x$ , B. -4)

7. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : R \rightarrow R$  για τις οποίες ισχύουν ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 4} = 1 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1 + 2h) + 2}{h} = 6.$$

- A. Να αποδείξετε ότι  $f(2) = 1$  και  $f'(2) = 3$ .

- B. Να αποδείξετε ότι  $g(1) = -2$  και  $g'(1) = 3$ .

- Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(2, f(2))$ , εφάπτεται στην  $C_g$  στο σημείο  $N(1, g(1))$ .

- Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = \begin{cases} f(2x) + x^2 - 1, & x \leq 1 \\ 3g(x) + \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$ . Να βρείτε τις τιμές των

$\alpha, \beta \in R$ , ώστε η  $h$  να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

(Απάντηση: Δ.  $\alpha = -1, \beta = 8$ )

8. Δίνεται συνάρτηση  $f$  με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu x}{e^x - 1} = 1,$
- $f(x) \neq e^x$  και
- $f^2(x) - 1 = +2e^x f(x) - e^{2x}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

A. Να δείξετε ότι  $f(0) = 2$ .

B. Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

Αν  $f(x) = e^x + 1$ , τότε:

Γ. Να βρείτε τα όρια

α.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\frac{1}{f(x)} - \eta\mu \frac{1}{x})]$

β.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{f(x)}}$

Δ. Αν  $g(x) = xf(x)$ ,

α. να δείξετε ότι η ευθεία  $y = 2x$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $g$ .

(Απάντηση: B.  $f(x) = e^x + 1$ , Γα.  $-\infty$ , Γβ.1)

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln^2 x + x, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ .

A. Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ .

B. Να δείξετε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Απάντηση: A.  $\alpha = 0$ , Γ.  $y = x$ )

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

A. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  να δείξετε ότι

α.  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+3y) - f(x)}{y} = 3f'(x)$

β.  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+5y) - f(x-3y)}{y} = 8f'(x)$

B. Αν η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  να δείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+6h) - 4f(x+3h) + 3f(x+2h)}{h^2} = 6f''(x)$$

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν

- $f(0) = 1$
- $f(x) \geq e^x + x - \ln(x^2 + 1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) + 2f(-h) - 3}{h^2} = -3$
- $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

A. Να δείξετε ότι  $f'(0) = 2$  και κατόπιν να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(0, f(0))$ .

B. Να δείξετε ότι  $f''(0) = -1$ .

12. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει ότι  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει **μια τουλάχιστον ρίζα στο  $[\alpha, \beta]$** .