ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 9/06/2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό σελ. 135

Α2.

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

(Θεωρία, σχολικό σελ. 99)

Α3. Θεωρία, σχολικό σελ. 73

Α4. (α) Λ

(β) Σ

(γ) Λ

(δ) Σ

(ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $\begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x \neq 1 \\ \text{και} \\ x(1-x) > 0 \end{matrix}$

x		0		1	
$x^2 - x$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα

$$\begin{matrix} x \neq 0 \\ 0 < x < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow D_{fog} = (0,1) \text{ με } (fog)(x) = f(g(x)) = \ln\frac{x}{1-x}$$

Β2. Η h παραγωγίσιμη $(0,1)$ με $h'(x) = \dfrac{1-x}{x} \cdot \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{x(1-x)} > 0$ άρα $h \uparrow$ στο $(0,1)$.

Άρα '1-1' και αντιστρέφεται.

Έστω $f(x) = y, \ x \in (0,1)$

$$\ln\frac{x}{1-x} = y, \ y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}, \ x \in \mathbb{R}$

B3. $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x\quad 1\right)^2}>0$$

Άρα η $\varphi \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$$\varphi''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-2e^xe^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

Άρα

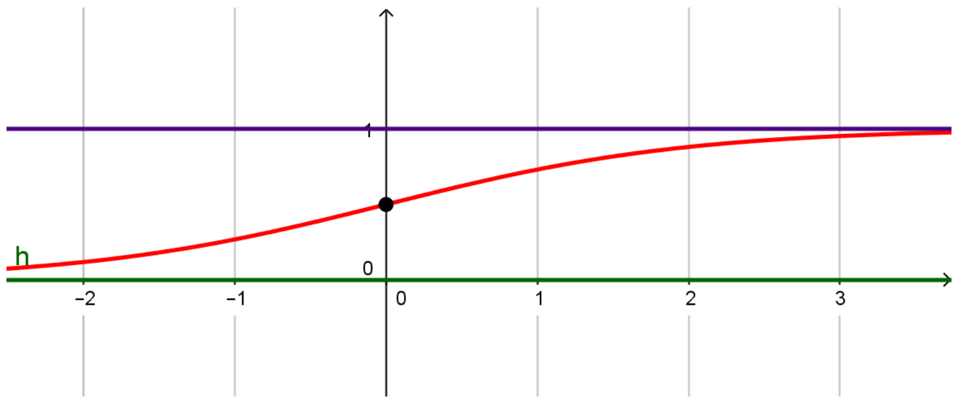
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
φ	$\cup$		$\cap$

ΣΚ

$$A\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

B4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$. Άρα η $(\varepsilon_1): y=0$ Οριζόντια Ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$. Άρα η $(\varepsilon_2): y=1$ Οριζόντια Ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

- $f(x) = -ημx \quad x \in [0,π]$
- $f'(x) = -συνx \quad x \in [0,π]$

Γ1. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

(ε) $\quad ψ - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow ψ + ημx_0 = -συνx_0(x - x_0) \Leftrightarrow ψ = -συνx_0 \cdot x + x_0 \cdot συνx_0 - ημx_0$

Πρέπει το σημείο $A\left(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}\right)$ να την επαληθεύει

Δηλαδή $-\frac{π}{2} = -συνx_0 \cdot \frac{π}{2} + x_0 \cdot συνx_0 - ημx_0$

Θεωρώ $h(x) = ημx + \frac{π}{2} \cdot συνx - x \cdot συνx - \frac{π}{2}, \quad x \in [0,π]$

$$h'(x) = συνx - \frac{π}{2}ημx - συνx + x \cdot ημx = ημx \cdot \left(x - \frac{π}{2}\right)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow ημx\left(x - \frac{π}{2}\right) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{κρίσιμο σημείο} \\ x = \frac{π}{2} & \text{κρίσιμο σημείο} \end{cases}$$

x	0		$\frac{π}{2}$		$π$
h'		$-$		$+$	
h		↘		↗	

Για $x = 0$ έχω τοπικό μέγιστο το $h(0) = 0$

Για $x = π$ έχω τοπικό μέγιστο το $h(π) = 0$

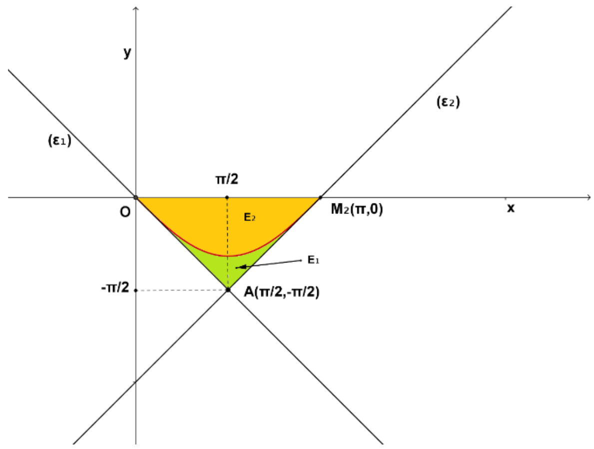
Για $x = \frac{π}{2}$ έχω ολικό ελάχιστο το $h\left(\frac{π}{2}\right) = ημ\frac{π}{2} + \frac{π}{2}συν\frac{π}{2} - \frac{π}{2}συν\frac{π}{2} - \frac{π}{2} = \frac{2-π}{2}$

Άρα η h έχει μοναδικές ρίζες $x_0 = 0, x_0 = π$

($ε_1$) $\quad ψ - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow ψ - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow ψ = -x$

$$(\varepsilon_2) \qquad \psi - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi) \Leftrightarrow \psi - 0 = -1(x-\pi) \Leftrightarrow \psi = x - \pi$$

Γ2.



$$E_2 = \int_0^{\pi} (0 + \eta\mu x)\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

$$E_{(OA\Gamma)} = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot U = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$E_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2-8}{4}}{2} = \frac{\pi^2-8}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. $h(x) = \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\cdot\left[f(x)+x\right]$

$$\lim_{x\to\pi} h(x) = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{1}{f(x)-x+\pi}\cdot\left[f(x)+x\right]\right] = +\infty$$

Διότι $\lim_{x\to\pi}\left[f(x)-x+\pi\right] = f(\pi) - \pi + \pi = 0^+$

Παρατηρώ ότι $f(x) - x + \pi > 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$

$$\lim_{x\to\pi}\left[f(x)+x\right] = f(\pi) + \pi = \pi$$

Γ4. Ισχύει ότι $f(x) > x - \pi$ για κάθε $x \in (0,\pi)$

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{x-\pi}{x} = 1 - \frac{\pi}{x}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)dx = \left[x - \pi\ln x\right]_1^e = e - \pi - 1$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. f συνεχής στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ πράξεις συνεχών. Άρα και στα $[-1,0)$ και $(0,\pi]$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \\ f(0)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{Η f συνεχής στο } x_0=0$$

Άρα η f συνεχής στο $[-1,\pi]$

Για $x\in[-1,0)\Rightarrow f(x)=(-x)^{4/3}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{4}{3}(-x)^{1/3}$

Για $x\in(0,\pi]\Rightarrow f(x)=e^x ημx\Rightarrow f'(x)=e^x(ημx+συνx)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow ημx+συνx=0$ ($συνx\neq 0$ γιατί αν $συνx=0$ άτοπο)$\Rightarrow εφx=-1=εφ\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} x=κ\pi-\dfrac{\pi}{4} \\ x\in(0,\pi] \end{array}\right|\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)^{4/3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{(-x)^{4/3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-(-x)^{1/3}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\ \ 0^+}\dfrac{e^x ημx}{x}=1 \end{array}\right|\Rightarrow \text{η f δεν είναι παρ/μη στο}$$

$x_0=0$

Άρα τα $(0,f(0))$ και $\left(\dfrac{3\pi}{4},f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ κρίσιμα σημεία

Δ2.

x	-1		0		$3\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			TE		TM		

Για

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)>0 \\ f'(x)\neq 0,\ x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)\ \text{και συνεχής} \end{array}\right|\Rightarrow f'(x)>0,\quad x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$$

Για

$$\left.\begin{array}{l} x=\pi\Rightarrow f'(\pi)=e^{\pi}\left(\eta\mu\pi+\sigma\upsilon\nu\pi\right)<0 \\ f'(x)\neq 0,\ \ x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]\ \text{και συνεχής} \end{array}\right|\Rightarrow f'(x)<0,\ x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$$

Για $x=0$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$

Για $x=\frac{3\pi}{4}$ έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(-1)=1$

$f(\pi)=0$

$$A_1=[-1,0]\underset{\text{συνεχής}}{\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}}f(A_1)=[f(0),f(-1)]=[0,1]$$

$$A_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\underset{\text{συνεχής}}{\overset{f}{\Rightarrow}}f(A_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$A_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\downarrow}{\Rightarrow}}f(A_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}\right]$$

Άρα $f(A)=\left[0,\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}\right]$ γιατί $\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2}$ προφανές

Δ3. $E=\int_0^{\pi}\left|f(x)-g(x)\right|dx$

$f(x)-g(x)=e^x\eta\mu x-e^{5x}$

Για

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 0\Rightarrow e^x\leq e^{5x} \\ \eta\mu x\geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow e^x\eta\mu x\leq e^{5x}\eta\mu x\leq e^{5x} \quad \text{άρα } f(x)-g(x)\leq 0$$

Άρα $E=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^x\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$

Αν $I_1=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx$

$I_1=-\left\{\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x(-\eta\mu x)dx\right\}$

$I_1=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-I_1 \Leftrightarrow 2I_1=-e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi+e^0 \Leftrightarrow 2I_1=e^{\pi}+1 \Leftrightarrow I_1=\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Άρα $E=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Δ4. $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$

$f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{16}$

$f(x)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Για $x=\frac{3\pi}{4}$ προφανής ρίζα

Για $x\neq\frac{3\pi}{4} \Rightarrow f(x)>f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ άτοπο. Άρα η ρίζα είναι μοναδική