ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ 2002

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α. α) Ονομάζουμε απόλυτη συχνότητα τον φυσικό αριθμό που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β) Αν διαιρέσουμε την συχνότητα ν_i με το μέγεθος V προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i

Δηλαδή $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ i=1,2,3....K

γ) i) $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu} \geq 0$ διότι $\nu_i \geq 0$

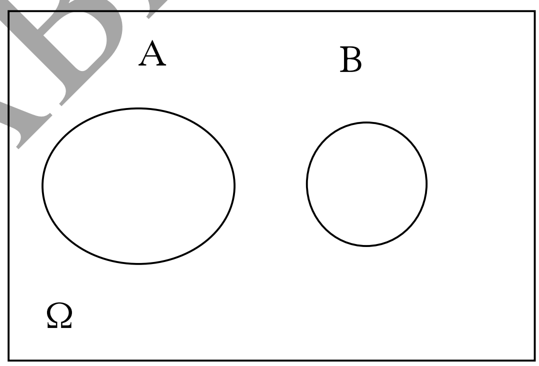
$f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu} \leq 1$ διότι $\nu_i \leq \nu$

ii) $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \dfrac{\nu_1}{\nu} + \dfrac{\nu_2}{\nu} + ... + \dfrac{\nu_K}{\nu} = \dfrac{\nu}{\nu} = 1$

Β1. Αν Ν(Α)=Κ και Ν(Β)=λ τότε το $A \cup B$ έχει κ+λ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β δεν θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλ. Έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$

Επομένως $P(A \cup B) = \dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} =$

$= \dfrac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} + \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$



Β2.α. Σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\dfrac{\kappa}{\nu}$

Γι' αυτό ορίζεται ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ο αριθμός

$$P(A)=\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

β. i) $P(\Omega)=1$

ii) $P(\varnothing)=0$

ΘΕΜΑ 2^{O}

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}$$

α) $x+1\neq 0 \leftrightarrow x\neq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x+1}=\frac{6}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

γ) $f'(x)=\frac{(2x)'\cdot(x+1)-(x+1)'\cdot 2x}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1\cdot 2x}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$ με

$x\neq -1$

δ) Η ευθεία (ε) ψ=2x+5 έχει συντελεστή διεύθυνση λ=2.

Οι εφαπτόμενες της f που είναι παράλληλες στην (ε) θα είναι λόγω της παραλληλίας της μορφής ψ=2x+β (1)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο ζητούμενο σημείο $M(x_0,f(x_0))$

θα είναι $f'(x_0)=\frac{2}{(x_0+1)^2}$ πρέπει

$$f'(x_0)=\lambda\varepsilon \leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2} \leftrightarrow (x_0+1)^2=1 \leftrightarrow x_0^{\ 2}+2x_0+1=1 \leftrightarrow$$

$x_0^2 + 2x_0 = 0 \leftrightarrow x_0(x_0+2) = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

άρα τα σημεία επαφής είναι:

$M_1(0, f(0)) = (0,0)$

$M_2(-2, f(-2)) = (-2,4)$

Η εφαπτομένη στο σημείο M_1 (0,0) είναι της μορφής ψ=2x+β και επειδή

το M_1 την επαληθεύει με αντικατάσταση βρίσκουμε $0 = 2 \cdot 0 + \beta$ με β=0

άρα (ε_1) ψ=2x

Η εφαπτομένη στο M_2(-2,4) είναι της μορφής ψ=2x+β και επειδή το M_2 την

επαληθεύει με αντικατάσταση βρίσκουμε

$4 = 2 \cdot (-2) + \beta \Rightarrow \beta = 8$ Άρα (ε_2) ψ=2x+8

ΘΕΜΑ 3^{O}

Βάζουμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά και έχουμε 8,9,10,13,13,14,14,15,16,18

- Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ν=10 άρτιος η διάμεσος θα είναι

$$\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$$

- Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \dfrac{8+9+10+13+13+14+14+15+16+18}{10} = \dfrac{130}{10} = 13$

- Η επικρατούσα τιμή είναι $M_0 = 13$ και $M_0 = 14$ δηλαδή έχουμε δύο επικρατούσες τιμές.

β)

- εύρος R=18-8=10

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10} =$$

- $\dfrac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + (14-13)^2 + (15-13) + (16-13)}{10}$

$$= \frac{25+16+9+1+1+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

- $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{9} = 3$

- $CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{3}{13} \simeq 0{,}23$

Άρα ο συντελεστής μεταβολής είναι περίπου 23%

γ) Η έκπτωση 10% όλων των τιμών ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό όλων των τιμών με $1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0{,}9$

Τότε ο $\overline{\psi} = 0{,}9 \cdot \overline{x}$

$$S_\psi = 0{,}9 \cdot S_x \quad \text{Άρα } CV' = \frac{S_\psi}{\overline{\psi}} = \frac{0{,}9 \cdot S_\psi}{0{,}9 \cdot \overline{x}} = \frac{S_x}{\overline{x}} = CV$$

Άρα παραμένει σταθερός.

ΘΕΜΑ 4^{O}

α) Από την σχέση: $P(A)+P(B) \neq 2P(A \cap B)$

έχουμε: $P(A \cup B)+P(A \cap B) \neq 2P(A \cap B)$

$P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$

β) Είναι $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$

Τότε : $f'(x) = 3(x - P(A \cup B)^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 =$

$$3\left[(x - P(A \cup B)^2 - (x - P(A \cap B)^2\right] =$$
$$3(x - P(A \cup B) + x - P(A \cap B))^2 (x - P(A \cup B) - x + P(A \cap B)$$
$$3 \cdot \left(P(A \cap B) - P(A \cup B)\right) \cdot \left[2x - (P(A \cup B) + P(A \cap B))\right]$$

Θα είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{2} = \frac{P(A) + P(B)}{2}$

Επίσης $P(A \cap B) - P(A \cup B) < 0$ Διότι $A \cap B \subseteq A \cup B$ και $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{P(A)+P(B)}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{P(A)+P(B)}{2}, +\infty\right)$

Άρα στο $x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο.

γ) Θα είναι $P(A \cap B) = 0$

Τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Άρα: $f(P(A)) = [P(A) - P(B))^3 - P(A)]^3 = -(P(B))^3 - (P(A))^3$

$f(P(B))=[P(B)-P(A)-P(B)]^3 - P(B)^3 = -[P(A)]^3 - [P(B)]^3$

Άρα $f(P(A))=f(P(B))$