ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2008

Θέμα 1^o:

Α. Θεωρία από σχολικό βιβλίο, σελ. 28
Β. Θεωρία από σχολικό βιβλίο, σελ. 96

Γ.

$\alpha \to \Lambda$	$\beta \to \Lambda$	$\gamma \to \Sigma$
$\delta \to \Sigma$	$\varepsilon \to \Sigma$	

Θέμα 2^o:

Α. Είναι: $\dfrac{e^x f(x)}{x^2-1} = \dfrac{e^x \dfrac{x-1}{e^x}}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

Β. Είναι: $f'(x) = \dfrac{(x-1)'e^x - (e^x)'(x-1)}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2-x)}{e^{2x}} = \dfrac{2-x}{e^x}, x \in R$.

Άρα $e^x f'(x) = e^x \dfrac{2-x}{e^x} = 2-x$

Γ. Έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{e^x} > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+		-
f	↗		↘

$$\left.\begin{array}{l} \text{Η f παραγωγήσιμη} (-\infty,2] \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (-\infty,2) \end{array}\right| \Rightarrow \text{η f είναι γνησίως αύξουσα στο } (-\infty,2]$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Η f παραγωγήσιμη} [2,+\infty) \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (2,+\infty) \end{array}\right| \Rightarrow \text{η f είναι γνησίως φθίνουσα στο} [2,+\infty)$$

άρα για x = 2 η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το f(2) = $\dfrac{1}{e^2}$.

Θέμα 3ο:

Α. Για τη μέση διάρκεια ζωής $\overline{X}_A$ των μπαταριών τύπου Α έχουμε:

$$\overline{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{v} = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ χιλιάδες ώρες}.$$

Για τη μέση διάρκεια ζωής $\overline{X}_B$ των μπαταριών τύπου Β έχουμε:

$$\overline{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{v} = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ χιλιάδες ώρες}.$$

Β. Για να επιλέξουμε ποιον τύπο μπαταρίας μας συμφέρει να αγοράσουμε αρκεί να συγκρίνουμε τους λόγους τιμής αγοράς ανά μέση διάρκεια ζωής (κόστος / μονάδα χρόνου).

Για τις μπαταρίες τύπου Α: $\lambda_1 = \frac{38}{22} \approx 1{,}73$.

Για τις μπαταρίες τύπου Β: $\lambda_2 = \frac{40}{24} \approx 1{,}67$.

Επειδή $\lambda_2 < \lambda_1$ μας συμφέρει να αγοράσουμε μπαταρίες τύπου Β.

Γ.

Η διακύμανση S_A^2 των μπαταριών τύπου Α είναι:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left(t_i - \overline{x}_A\right)}{v} = \frac{(20-22)^2+(26-22)^2+(24-22)^2+(22-22)^2+(18-22)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+16+4+0+16}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Επομένως $S_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ χιλιάδες ώρες.

Η διακύμανση S_B^2 των μπαταριών τύπου Β είναι:

$$S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left(t_i - \overline{x}_B\right)}{v} = \frac{(26-24)^2+(32-24)^2+(19-24)^2+(20-24)^2+(23-24)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+64+25+16+1}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

Επομένως $S_B = \sqrt{22} = \sqrt{2}\sqrt{11}$ χιλιάδες ώρες.

Δ. Για να βρούμε ποιος από τους τύπους των μπαταριών παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια πρέπει να βρούμε τους συντελεστές μεταβολής. Έτσι έχουμε:

$$CV_A = \frac{S_A}{\overline{X}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11} \quad \text{και} \quad CV_B = \frac{S_B}{\overline{X}_B} = \frac{\sqrt{11}\sqrt{2}}{24} = \frac{3{,}3\sqrt{2}}{24}$$

Ο λόγος $\frac{CV_A}{CV_B}$ είναι $\frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{3{,}3\sqrt{2}}{24}} = \frac{24\sqrt{2}}{11 \cdot 3{,}3\sqrt{2}} = \frac{24}{36{,}3} < 1$.

Άρα: $CV_A < CV_B$ οπότε οι μπαταρίες τύπου Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Θέμα 4^{o}:

Έστω
Α: διαβάζει εφημερίδα α
Β: διαβάζει εφημερίδα β

Άρα P(A)=0,5
P(A-B)=0,3

α) $P(A' \cup B)=;$
$P(A-B)=0{,}3 \Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}5-P(A\cap B)=0{,}3 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$

Άρα $P(A' \cup B)=P(A')+P(B)-P(A' \cap B)=1-P(A)+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))$
$=1-P(A)+P(B)-P(B)+P(A\cap B)=1-0{,}5+0{,}2=0{,}7$

β) Αφού $A\cap B \subseteq B \Rightarrow P(A\cap B) \le P(B)$
$0{,}2 \le P(B)$
$\frac{1}{5} \le P(B)$

Αφού $P(A\cup B) \le 1$
$P(A)+P(B)-P(A\cap B) \le 1$
$P(A-B)+P(B) \le 1$
$0{,}3+P(B) \le 1$
$P(B) \le 0{,}7$
$P(B) \le \frac{7}{10}$
ή αφού $B \subseteq A' \cup B \Rightarrow P(B) \subseteq P(A'\cup B) \Rightarrow P(B) \subseteq 0{,}7$

Άρα $\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$

γ) $\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-x+P(B) \\ \Delta=1-12P(B) \\ \text{Και αφού } \frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta<0$

Άρα f'(x)>0 για κάθε $x \in \Re \Rightarrow f = \uparrow \;\; \sigma\tau o \;\; \Re$ και δεν έχει ακρότατα.