ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2009

ΘΕΜΑ 1^{Ο}:

Α. Θεωρία, σελίδα 150 του σχολικού βιβλίου
Β. Θεωρία , σελίδα 65 του σχολικού βιβλίου
Γ.
α – Λ
β – Σ
γ – Λ
δ – Σ
ε – Σ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}:

α.

x_i	v_i	$v_i x_i$
2	6	12
3	x = 7	21 = 3x
5	3	15
8	4	32
	v = 20	3x + 59

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}=\dfrac{\sum\limits^{4} x_i v_i}{v}=4 \Leftrightarrow 3x+55=4v \\ v_1+v_2+v_3+v_4=v\end{array}\right| \Rightarrow 3x+59=4x+52 \Leftrightarrow \quad x=7=v_2$$

β.

$$S^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2 v_i}{v}=\frac{(2-4)^2 6+(3-4)^2 7+(5-4)^2 3+(8-4)^2 4}{20}=\frac{24+7+3+64}{20}=\frac{98}{20}=4{,}9$$

γ. Για $\bar{x}=4>0$ και $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{4{,}9}\approx 2{,}2$ έχουμε ότι

$$S\approx 2{,}2 \Rightarrow CV=\frac{S}{|\bar{x}|}=\frac{2{,}2}{4}=\frac{1{,}1}{2}=0{,}55=55\%>10\% \ .$$

Άρα το δείγμα των τιμών της μεταβλητής x δεν είναι ομοιογενές, διότι CV > 10%.

ΘΕΜΑ 3^{Ο}:

α. Για κάθε $x \in R$

$$f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7$$
$$f'(x)=3x^2-12x+\alpha$$
$$f''(x)=6x-12$$

άρα έχουμε:

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2$$
$$2(6x-12)+3x^2-12x+\alpha+15=3x^2$$
$$12x-24+3x^2-12x+\alpha+15=3x^2$$
$$\alpha=9$$

β.

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x^2-4x+3)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(1-3)}{1+1}=-3$$

γ.
Η $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ εφαπτόμενη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$
Η (ε) // (η): y = -3x και $\lambda_\eta = -3$, οπότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta = -3$

Άρα

$$\lambda=f'(x_0)=-3$$
$$3x_0^2-12x_0+9=-3$$
$$x_0^2-4x_0+3=-1 \Leftrightarrow x_0^2-4x_0+4=0$$
$$(x_0-2)^2=0$$
$$x_0=2$$

Το A(2, f(2)) $\in(\varepsilon)\Rightarrow f(2)=-3\cdot2+\beta=8-24+18-7=-6+\beta\Rightarrow 1=\beta$, άρα
(ε): y = -3x + 1

ΘΕΜΑ 4^{o}:

Α.

α. $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}, x>0$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2-x}{2x}>0\xleftrightarrow{x>0}2-x>0\Leftrightarrow x<2$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow x>2$$

Η $\left.\begin{matrix} f'(x)>0 \text{ στο } (0,2) \\ f=\text{παρ/μη στο } (0,2] \end{matrix}\right| \rightarrow$ η f είναι ↑ στο (0,2]

Η $\left.\begin{matrix} f'(x)<0 \text{ στο } (2,+\infty) \\ f=\text{παρ/μη στο } [2,+\infty) \end{matrix}\right| \rightarrow$ η f είναι ↓ στο [2,+∞)

x	0	2	
f'		+ 0	-
f		↗	↘

β.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x \le 2 \xrightarrow{f\uparrow} f(x) \le f(2) \\ x \ge 2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x) \le f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in R,\ f(x) \le f(2)$$, άρα για x = 2 η f έχει μέγιστο το

$$f(2) = \ln_2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2.$$

$$f(2) = \ln_2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

Β. α.

Αφού 2 < 3 < 4 < 5 < 8 $\xrightarrow{f\downarrow \text{ στο } [2,+\infty]} f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$

Άρα $R = f(2) - f(8) = \ln_2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 - 3\ln 2 - \lambda^2 + 6\lambda + 2$ οπότε

$$R = 3 - 2\ln^2 = 3 + \ln 2^{-2} = 3 + \ln\frac{1}{4}$$

$\nu = 5 \Rightarrow \delta = t_3 = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$

β.

$\Omega = \{1,2,3,.............,100\}$

$$R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 2 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 2 + 2\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$\lambda = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} \lambda = 5 \\ \text{ή} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

λ	- ∞	1		5	+ ∞
$\lambda^2 - 6\lambda + 5$	+	0	-	0	+

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \in (1,5) \\ \lambda \in \Omega \end{array}\right| \rightarrow \lambda = 2,3,4 \text{ άρα } A = \{2,3,4\} \Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0{,}03$$