ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄
23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 31 σχολ. βιβλίου.
Α2. Θεωρία, σελ. 148 σχολ. βιβλίου.
Α3. Θεωρία, σελ. 96 σχολ. βιβλίου.
Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων, από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων θα είναι δ = 25.

Β2. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% και είναι δ = 25 θα είναι

$$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = -4 + 6 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων θα είναι

χρόνος (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3.

Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i x_i}{v} = \dfrac{10\bullet12 + 20\bullet18 + 30\bullet24 + 40\bullet6}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$ λεπτά.

Επίσης $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{v} = \dfrac{v_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + v_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2 + v_3\left(x_3-\bar{x}\right)^2 + v_4\left(x_4-\bar{x}\right)^2}{v} =$

$$= \frac{12(10-24)^2 + 18(20-24)^2 + 24(30-24)^2 + 6(40-24)^2}{60} =$$

$$\frac{12\cdot195 + 18\cdot16 + 24\cdot36 + 6\cdot256}{60} = \frac{5040}{60} = \frac{504}{6} = 84.$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $S=\sqrt{s^2}=\sqrt{84}\simeq 9{,}17$ λεπτά.

Β4.

Από 35 έως 45 έχουμε το 10% των παρατηρήσεων και έστω x% το ποσοστό των παρατηρήσεων από 37 έως 45 . Τότε θα είναι:

$$\frac{45-35}{45-37}=\frac{10}{x}\Leftrightarrow\frac{10}{8}=\frac{10}{x}\Leftrightarrow 10x=80\Leftrightarrow x=8\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν Γ και Ι είναι τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να μαθαίνει αντίστοιχα Γαλλικά, Ισπανικά, τότε είναι:

$$P(\Gamma\cup \mathrm{I})=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)}=1.$$

Άρα το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει τουλάχιστον μια από τις 2 γλώσσες είναι βέβαιο.

Γ2. Είναι $P(\Gamma)=\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I)=\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cup \mathrm{I})=1$.

Όμως $P(\Gamma\cup \mathrm{I})=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap \mathrm{I})$, άρα:

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+\nu+2-\nu-1\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu=0 \;\; ή \;\; \nu=3.$$

Επειδή $\nu\geq 3$ προκύπτει $\nu=3$.

Γ3. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι το: $(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)$.

Είναι $P((\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma))=P(\Gamma)+P(\mathrm{I})-2P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\dfrac{9}{10}+\dfrac{5}{10}-2\cdot\dfrac{4}{10}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

Γ4. $P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$. Όμως $P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\dfrac{\mathrm{N}(\Gamma\cap \mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}$.

Έτσι $\dfrac{\mathrm{N}(\Gamma\cap \mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow\dfrac{32}{\mathrm{N}(\Omega)}=\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow \mathrm{N}(\Omega)=80$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x)=\left(\frac{1+\ln^2 x}{x}\right)'=\frac{x\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=$$
$$-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}$$

Επειδή είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$, $f'(e) = 0$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΛΜΚ είναι: $E(x)=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x}=1+\ln^2 x$.

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$E'(x)=(1+\ln^2 x)'=2\ln x(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}.$$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1.$$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$E(1)=1\cdot\frac{1+\ln^2 1}{1}=1$. Για την τιμή $x = 1$, έχουμε $f(1) = 1$, επομένως $(ΟΛ) = (ΟΚ)$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Επειδή η ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$ είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$, θα είναι: $\lambda = f'(1) = -1$.

Έτσι έχουμε: $y = -x + \beta$, με $\beta \neq 10$.

Επειδή η μέση τιμή των παρατηρήσεων x_i είναι $\bar{x}=10$ και $y_i=(-1)x_i+\beta$ προκύπτει ότι:

$$\bar{y}=-10+\beta \text{ και } S_y=|-1|\cdot S_x=2$$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων y_i με $i = 1,2 \ldots, 10$ ομοιογενές θα πρέπει: $\frac{S_y}{|\bar{y}|}\leq 0,1$.

$$\frac{S_y}{|\bar{y}|} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{\left|-\bar{x}+\beta\right|} \le \frac{10}{100} \Leftrightarrow \left|-\bar{x}+\beta\right| \ge 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|-10+\beta\right| \ge 20 \Leftrightarrow \left(-10+\beta \le -20 \text{ ή } -10+\beta \ge 20\right) \Leftrightarrow \beta \le -10 \text{ ή } \beta \ge 30 .$$

Άρα: $\beta \in (-\infty,-10] \cup [30,+\infty)$.

Δ4.

(i) $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \le P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1)

(ii) $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:
$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$.