ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α4. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- $$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{1}{4}.$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1, ισούται με $f\,'(1)$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x > 0 με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}.$$

  Για x = 1 έχουμε:

$$f\,'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Β2. Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Επειδή $\{\omega_3\} \subseteq A'$ είναι $P(\omega_3) \le P(A')$. Όμως $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

οπότε $\frac{1}{3} \le P(A')$. $P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \ge \frac{1}{4}$.

Πράγματι, $\{\omega_1\} \subseteq A$ άρα $P(\omega_1) \le P(A)$. Όμως $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, άρα $P(A) \ge \frac{1}{4}$.

Β3.

$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$.

Όμως $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$ και επειδή $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

προκύπτει $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$.

Είναι $P(\Omega) = 1$, άρα $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

και επειδή $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_4) = 0$ προκύπτει

$P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$.

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$
$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) \quad (1)$

Όμως $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, άρα $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$.

$\mathrm{B} = \{\omega_1, \omega_3\}$, άρα $P(\mathrm{B}) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \{\omega_1\}$, άρα $P(A\cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$.

Από την (1) βρίσκουμε ότι:

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2\bullet\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

$P(A'-B') = P(A') - P(A'\cap B') = P(A') - P\left[(A\cup B)'\right] = 1 - P(A) - 1 + P(A\cup B) =$
$= P(A\cup B) - P(A) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A) =$
$= P(B) - P(A\cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι $(50 + 3c, 50 + 4c)$. Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι

$\frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 50 + \frac{7c}{2} = 85 \Leftrightarrow \frac{7c}{2} = 35 \Leftrightarrow c = 10$.

Γ2. Αφού η διάμεσος είναι $\delta = 75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 50\%$.

Επίσης, $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$. Επίσης ισχύουν $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ καθώς και $f_4 = 2f_3$ άρα,

$$\left.\begin{array}{l} f_1 + f_2 + \dfrac{f_3}{2} = 0,5 \\ 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \\ f_4 = 2f_3 \end{array}\right\}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $f_1 = 0{,}1$ $f_2 = 0{,}3$ $f_3 = 0{,}2$ $f_4 = 0{,}4$.
Έτσι προκύτει ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	x_i	f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο	280	1

Γ3. Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80 έχουν διαφορετική βαρύτητα, άρα

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{55 \bullet 0,1 + 65 \bullet 0,3 + 75 \bullet 0,2}{0,1 + 0,3 + 0,2} = \frac{5,5 + 19.5 + 15}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}.$$

Γ4. Αφού η κατανομή είναι κανονική και το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\bar{x} + 2s = 74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι θα είναι $\bar{x} - s = 68$, όπου $\bar{x}, s$ η μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των κ παρατηρήσεων.
Άρα θα είναι $\bar{x} + 2s = 74$, $\bar{x} - s = 68$.
Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\delta = 2$ και $\bar{x} = 70$.
Ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{70} < \dfrac{1}{10}$.
Άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1,\ x > 0$
Η εφαπτόμενη της f στο στο σημείο (1, f(1)) είναι:
(ε): $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(1) = 1$.
Επειδή η (ε) διέρχεται από το (1, f(1)) αλλά
$f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(1) - 1 = 1\ln 1 + \kappa - 1 = \kappa = 1$
η (ε) γίνεται $y = x + \kappa - 1$.
Τα σημεία Α, Β στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι Α(1-κ, 0) και Β(0, κ-1) αντίστοιχα.

Το τρίγωνο ΟΑΒ έτσι έχει εμβαδόν:

$$E=\frac{|1-\kappa|\bullet|\kappa-1|}{2}=\frac{(\kappa-1)^2}{2}$$

Δίνεται Ε< 2, άρα $\frac{(\kappa-1)^2}{2}<2 \Leftrightarrow |\kappa-1|^2<4 \Leftrightarrow -2<\kappa-1<2 \Leftrightarrow -1<\kappa<3$

Όμως κ ακέραιος με κ>1, άρα κ= 2.

Δ2.

α) Επειδή κ= 2 η (ε) γίνεται $y=x+1$
Επίσης από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι:
$\bar{y}=\bar{x}+1 \Leftrightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$.

β) Είναι $31=\frac{(x_1+3)+\ldots+(x_{20}+3)+x_{21}+\ldots+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+\ldots+(x_{50}-\lambda)}{50} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i+60-15\lambda=31\bullet 50 \Leftrightarrow 30\bullet 50+60-15\lambda=30\cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60-15\lambda=50 \Leftrightarrow 10=15\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$$

Δ3. Είναι f΄(x) = ln x + 1, x > 0.
Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0		1/e		+∞
f΄(x)		–	0	+	
f(x)		↘		↗	

Προκύπτει $\min f: f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}=\frac{2e-1}{e}>0$

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e).$$

Επειδή $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ προκύπτει: $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$.

Έτσι $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$.

Από τη δοσμένη σχέση $a^a\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7$ προκύπτει

$$\ln(a^a\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma)=\ln e^7 \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)-2+f(\beta)-2+f(\gamma)-2=7 \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=13.$$

Έτσι: $\overline{x} = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} =$

$= \dfrac{13+e+2}{5} = \dfrac{15+e}{5}$.

Δ4. α) Για το ενδεχόμενο Α έχουμε:

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1+\ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{e}$.

Άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, t_{13} \ldots, t_{30}\}$.

$N(A) = 20$ άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:

$f(t) > f(t') + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > 1 + \ln t + 1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0$.

Άρα $\{\, t-1<0$ και $\ln t < 0\,\}$ ή $\{\, t-1>0$ και $\ln t > 0\,\}$

Η δεύτερη περίπτωση δεν μπορείν να ισχύει διότι $t \in \Omega$, άρα t< 1.

Άρα 0< t < 1, άρα $B = \{t_1, t_2, t_{13} \ldots, t_{29}\}$.

Έτσι $A \cap B = \{\, t_{11}, t_{12}, t_{13} \ldots, t_{29}\}$ και άρα $P(A \cap B) = \dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$.