

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σελίδα 194 σχολικού βιβλίου.
A2. Θεωρία, σελίδα 188 σχολικού βιβλίου.
A3. Θεωρία, σελίδα 259 σχολικού βιβλίου.
A4. α) Λ , β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Lambda$, δ) Σ , ε) $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$|(x-4) + yi| = 2|(x-1) + yi| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2.$$

Δηλαδή προκύπτει κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

(β' τρόπος) Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 2^2 \cdot |z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4) \cdot (\bar{z}-4) = 4 \cdot (z-1) \cdot (\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - 4 \cdot \bar{z} - 4z + 16 = 4 \cdot (z \cdot \bar{z} - \bar{z} - z + 1) \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + 16 = 4z \cdot \bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z \cdot \bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z| = 2.$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

B2. α) Ο w είναι πραγματικός, αν και μόνο αν, είναι $\bar{w} = w$.

Πράγματι

$$\bar{w} = w \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \frac{(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2)}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(z_1^2 + z_2^2)}{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_2^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \bar{z}_1) \bar{z}_1 \cdot z_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_1 \cdot \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) z_1 \cdot \bar{z}_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_2|^2 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\bar{z}_1 \cdot z_2 + 4z_1 \bar{z}_2 = 4z_1 \cdot \bar{z}_2 + 4z_2 \bar{z}_1 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ αληθές.}$$

Άρα $\bar{w} = w$ και $w \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|w| \leq 4$.

Πράγματι:

$$|w| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8.$$

Η τελευταία ισχύει διότι:

$$|z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8.$$

B3. Αν $w = -4$ είναι

$$\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0.$$

Από τη σχέση $(z_1 + z_2)^2 = 0$ προκύπτει $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$.

$$|z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1| \cdot |2i - 1| = 2 \cdot |-1 + 2i| = 2\sqrt{5}.$$

$$|z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1| \cdot |2i + 1| = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

Προκύπτει $|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \Leftrightarrow (ΑΓ) = (ΒΓ)$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}.$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών για την f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	+
f			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών θα είναι το διάστημα

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{1}{x^2+1} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2)$. Όμως η f ως γνησίως αύξουσα είναι και 1-1. Άρα
 ισοδύναμα γράφεται: $e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$. Όμως η τιμή $\frac{e^3}{2}$
 ανήκει στο σύνολο τιμών της f , η οποία είναι και γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει
 μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$. Δηλαδή, η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μία
 ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad \text{με } h'(x) = f(x).$$

Η σχέση $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x)$ με $x > 0$, γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt < 2x f(4x) &\Leftrightarrow \int_1^{4x} f(t) dt - \int_1^{2x} f(t) dt < 2x f(4x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} < f(4x). \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[2x, 4x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε

$$\frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = h'(\xi) \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = f(\xi).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι $f(\xi) < f(4x)$ με $2x < \xi < 4x$, που όμως ισχύει διότι η f
 είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι:

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$g(x) = \frac{\int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{-\int_1^{2x} f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{-h(2x) + h(4x)}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(4x) - h(2x)}{x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4h'(4x) - 2h'(2x)}{(x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (4f(4x) - 2f(2x)) = 4f(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$).

Άρα η g είναι συνεχής στο 0.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{h(4x) - h(2x)}{x} \right)' = \left(\frac{h(4x)}{x} \right)' - \left(\frac{h(2x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(h(4x))' \cdot x - h(4x) \cdot x'}{x^2} - \frac{(h(2x))' \cdot x - h(2x) \cdot x'}{x^2} = \\ &= \frac{4f(4x) \cdot x - h(4x) - 2f(2x) \cdot x + h(2x)}{x^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\
 &= \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\
 &= \left[\ln(1 + \sqrt{2}) \right] - \left[\sqrt{2} - 1 \right] = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.
 \end{aligned}$$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} - (\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \\
 &= \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

Δ3. Επειδή $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι $f \uparrow$ στο \mathbb{R} .

Οπότε για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] = 0$.

τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln |f(x)|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$.

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot f(x) \cdot \ln f(x) \right]
 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) \ln f(x)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \cdot \ln u) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\text{LH}}{=} \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = - \lim_{n \rightarrow 0^+} u = 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot f(x) \cdot \ln f(x) \right] = 0.$$

Δ4. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{(x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)}{(x-2)(x-3)} = 0, x \in (2,3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)$,

η οποία είναι συνεχής στο $[2, 3]$ με

$$g(2) = -8 + 3 \int_0^2 f^2(t) dt \text{ και } g(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt$$

Όμως στο ερώτημα Δ₂ έχει αποδειχθεί ότι $f(x) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$. Επειδή είναι και

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ προκύπτει: } f^2(x) \leq x^2 \text{ οπότε και } \int_0^2 f^2(x) dx < \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

Άρα $g(2) < 0$.

Από την $f(x) \leq x$ τώρα θέτοντας όπου x το x^2 , προκύπτει $f(x^2) \leq x^2$ και έτσι

$$\int_0^1 f(x^2) dx < \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}. \text{ Άρα } g(3) > 0.$$

Συνεπώς $g(2)g(3) < 0$ και έτσι από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε

$g(x_0) = 0$, δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση

$$\frac{(x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)}{(x-2)(x-3)} = 0, \text{ έχει μία τουλάχιστον λύση}$$

στο διάστημα $(2, 3)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΤΑΒΑΣΗ