ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεωρία σελ. 98

Α.2. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

Β.1. $1\to\zeta$ $2\to\gamma$ $3\to\alpha$ $4\to\delta$ $5\to\beta$

Β.2. $|z|=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=1\Leftrightarrow\bar{z}=\dfrac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αφού η f είναι συνεχής (άρα και στο $x_0=3$), θα ισχύει : $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)$, έχουμε :

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(\alpha\alpha^2)=9\alpha$ και

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to3^+}\frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'}=\lim_{x\to3^+}\frac{-e^{x-3}(x-3)'}{1}=\lim_{x\to3^+}\left(-e^{x-3}\right)=-1 \text{ και}$$

$f(3)=9\alpha$. Άρα : $9\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{9}$.

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)) είναι : $y-f(4)=f'(4)(x-4)$ (ε)

Έχουμε : $f(4)=\dfrac{1-e^{4-3}}{4-3}=1-e$

Για x>3 έχουμε: $f(x)=\dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}$, οπότε :

$$f'(x)=\frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2}=\frac{-xe^{x-3}+3e^{x-3}-1+e^{x-3}}{(x-3)^2}=\frac{4e^{x-3}-xe^{x-3}-1}{(x-3)^2}, \text{ άρα}$$

$f'(4)=\dfrac{4e-4e-1}{(4-3)^2}=-1$, οπότε :

(ε): $y-(1-e)=-1\cdot(x-4)\Leftrightarrow y-1+e=-x+4\Leftrightarrow y=-x+5-e$

γ. Επειδή δεν διευκρινίζεται αν θέλει το εμβαδόν για $\alpha=-\dfrac{1}{9}$ ή για κάθε τιμή του α , έχουμε :

- Αν $\alpha=-\dfrac{1}{9}$ τότε $f(x)=-\dfrac{1}{9}x^2<0$, οπότε :

  $$E=-\frac{1}{9}\int_1^2-x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\frac{7}{3}=\frac{7}{27} \text{ τ.μ.}$$

- Για κάθε τιμή του α, έχουμε :

α) Αν α=0 δεν υπολογίζουμε το εμβαδόν αφού f(x)=0 στο [1,2]

β) Αν $\alpha \neq 0$ τότε $E = |\alpha| \int_1^2 x^2 dx = |\alpha| \frac{7}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3ο

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε :

$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma\right) = 3x^2 - 4x + 6 \quad (1)$

Θέτουμε $f(x) = y$, οπότε θεωρώντας τη συνάρτηση $g(y) = 3y^2 + 2\beta y + \gamma$ η $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ από υπόθεση. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ $g(y) > 0$ και επειδή $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta' = 16 - 72 = -56 < 0$, από την (1) συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε :

α. Η f δεν έχει ακρότατα αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από Θ. Fermat)

β. Και η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f είναι συνεχής στο [0,1], αφού είναι παραγωγίσιμη.

- Για x = 0 η δοσμένη σχέση γίνεται :
  $f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) \cdot \left[f^2(0) + \beta f(0) + \gamma\right] = -1$.
  Επειδή $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$ $\left(\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ αφού } \beta^2 < 3\gamma\right)$, άρα f(0)<0
- Όμοια για x = 1 η δοσμένη σχέση γίνεται :
  $f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1) \cdot \left[f^2(1) + \beta f(1) + \gamma\right] = 4$.
  Επειδή $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ $\left(\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ αφού } \beta^2 < 3\gamma\right)$, άρα f(1)>0

Οπότε $f(0) \cdot f(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1). Επίσης επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο (0, 1) η f είναι "1-1" άρα η ρίζα είναι μοναδική στο (0, 1) .

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θέτουμε $u = xt$, οπότε : $du = x \cdot dt$ και $u_1 = x \cdot 0 = 0$, $u_2 = x \cdot 1 = x$, οπότε:

$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 x^2 t f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 xt f^2(xt)xdt = 1 - 2\int_0^x u f^2(u)du$

οπότε : $f'(x = \left(1 - 2\int_0^x u f^2(u)du\right)' = -2x f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή, σύμφωνα με πόρισμα του Θ.Μ.Τ.

γ. Από το (α) ερώτημα έχουμε : $f''(x = -2x f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f''(x}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = 2x$

άρα $\int \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$

Όμως $f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{0^2 + c} = 1 \Leftrightarrow c = 1$, επομένως $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

δ. $\lim_{x \to +\infty} (x\ f(x)\ ημ2x) = \lim_{x \to +\infty} (x \frac{1}{1+x^2} ημ2x) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{x}{1+x^2} ημ2x)$

Όμως $\left|\frac{x}{1+x^2} ημ2x\right| \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{x}{1+x^2} ημ2x \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right|$

Επειδή $\lim_{x \to +\infty}\left(-\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\right) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty}\left(\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\right) = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε : $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{1+x^2} ημ2x\right) = 0$