

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2002**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Θεωρία σελ. 335

**B.1.** Θεωρία σελ. 225

**B.2. α.** Λάθος (π.χ.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ )    **β.** Λάθος (π.χ.  $f(x) = \frac{1}{x}$ )    **γ.** Σωστό  
**δ.** Σωστό (Αν θεωρήσουμε ότι η  $f'$  είναι συνεχής, αλλιώς λάθος)  
**ε.** Σωστό

**ΘΕΜΑ 2ο**

**α.**  $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z = (i^3 + i^8 + i^{13} + i^{18}) z =$   
 $= (-i + i^{2 \cdot 4 + 0} + i^{3 \cdot 4 + 1} + i^{4 \cdot 4 + 2}) z = (-i + i^0 + i^1 + i^2) z = (-i + 1 + i - 1) z = 0$

**β.**  $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$f(13) = i^{13} \cdot z = i \cdot z = \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \rho (\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \left[ \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

**γ.**  $|z| = 2$ ,  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$

$$f(13) = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) =$$
  
 $= 2 \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left( -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$

Έστω  $O(0,0)$ ,  $B(1,\sqrt{3})$ ,  $\Gamma(-\sqrt{3},1)$  τότε:

$$|OB| = 2, |OG| = 2 \text{ και } |B\Gamma| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Παρατηρώ ότι το τρίγωνο  $O\hat{B}\Gamma$  είναι ισοσκελές και ορθογώνιο διότι:

$$|OB|^2 + |OG|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = |B\Gamma|^2 \text{ άρα } E_{O\hat{B}\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ τ.μ.}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος για τον υπολογισμό του εμβαδού

$$(O\hat{B}\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{OB} & \vec{OG} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1+3| = 2 \text{ τ.μ.}$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

**α.** Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $g(x_1) = g(x_2)$  τότε  $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ , δηλαδή  $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$  και επειδή η  $f \circ g$  είναι 1-1 θα είναι  $x_1 = x_2$ , οπότε η  $g$  είναι 1-1.

β. Έχουμε :  $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$  και επειδή η  $g$  είναι 1-1 (από το α ερώτημα) η παραπάνω είναι ισοδύναμη με την  $f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Leftrightarrow x^3-x=2x-1 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $F(x)=x^3-3x+1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε :  $F'(x)=3x^2-3$ . Τα πρόσημα της  $F$  και η μονοτονία της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗		↘		↗

- Η  $F$  είναι συνεχής στο  $[-2, -1]$  ως πολυωνυμική  $F(-2)=-1$ ,  $F(-1)=3$ , οπότε  $F(-2) \cdot F(-1) < 0$   
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\rho_1 \in (-2, -1)$  τέτοιο ώστε  $F(\rho_1)=0$ , δηλαδή η εξίσωση  $F(x)=0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(-2, -1)$  και επειδή  $F$  γνησίως αύξουσα στο  $(-2, -1)$  η ρίζα είναι μοναδική με  $\rho_1 < 0$ .
- Η  $F$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική  $F(0)=1$ ,  $F(1)=-1$ , οπότε  $F(0) \cdot F(1) < 0$   
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\rho_2 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $F(\rho_2)=0$ , δηλαδή η εξίσωση  $F(x)=0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0, 1)$  και επειδή  $F$  γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1)$  η ρίζα είναι μοναδική με  $\rho_2 > 0$ .
- Η  $F$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  ως πολυωνυμική  $F(1)=-1$ ,  $F(2)=3$ , οπότε  $F(1) \cdot F(2) < 0$   
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\rho_3 \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $F(\rho_3)=0$ , δηλαδή η εξίσωση  $F(x)=0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(1, 2)$  και επειδή  $F$  γνησίως αύξουσα στο  $(1, 2)$  η ρίζα είναι μοναδική με  $\rho_3 > 0$ .

Επειδή η εξίσωση  $F(x)=0$  είναι τρίτου βαθμού οι παραπάνω ρίζες είναι και οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης, δύο θετικές και μία αρνητική.

#### ΘΕΜΑ 4ο

α.  $h(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , οπότε :  $h(x)-g(x) > 0$  και συνεπώς (Θεώρημα 3 σελ. 332) είναι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (h(x)-g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$



β. i) Παραγωγίζοντας τη σχέση  $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$  έχουμε :

$$f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}$$

ii) Είναι  $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0$  , οπότε :

$$f''(x) = -\frac{-e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η  $f'(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $f$  στο  $[0, x]$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Η  $f$  στο  $(0, x)$  είναι συνεχής.

Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, x)$  τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \xi \in (0, x) \Leftrightarrow 0 < \xi < x \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x \cdot f'(0) < f(x) < x \cdot f'(x) \stackrel{f(0) = \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$$

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι  $f(x) > \frac{x}{2} \geq 0$  , για  $x \geq 0$  ,

οπότε το εμβαδόν του χωρίου είναι :  $E = \int_0^1 f(x) dx$

Από το προηγούμενο ερώτημα για  $x \geq 0$  , έχουμε :

$$\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x) \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E$$

$$\text{Άρα } E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} f(1)$$

$$\text{Τελικά λοιπόν : } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$