ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 194 (Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)

Α.2 Η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$

Β. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Λ **στ.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z_1|=3 \Leftrightarrow |z_1|^2=9 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=9 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$

β. Έστω $w=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$. Τότε $\overline{w}=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\dfrac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\dfrac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=w$

Ισχύει λοιπόν $w=\overline{w} \Leftrightarrow w-\overline{w}=0 \Leftrightarrow 2\cdot \mathrm{Im}(w)\cdot i=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w)=0$ και συνεπώς ο $w\in \mathbb{R}$.

γ. $|z_1+z_2+z_3|=\left|\dfrac{9}{\overline{z_1}}+\dfrac{9}{\overline{z_2}}+\dfrac{9}{\overline{z_3}}\right|=9\left|\dfrac{1}{\overline{z_1}}+\dfrac{1}{\overline{z_2}}+\dfrac{1}{\overline{z_3}}\right|=9\left|\dfrac{\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}+\overline{z_1}\cdot\overline{z_3}+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}}\right|=$

$=9\dfrac{\left|\overline{z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2}\right|}{\left|\overline{z_1}\right|\cdot\left|\overline{z_2}\right|\cdot\left|\overline{z_3}\right|}=9\dfrac{|z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2|}{3\cdot3\cdot3}=\dfrac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x)=\lambda\cdot e^{\lambda x}>0$, αφού λ > 0 οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της C_f και της εφαπτομένης. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-e^{\lambda x_0}=\lambda\cdot e^{\lambda x_0}(x-x_0)$ (1) και αφού διέρχεται από το Ο(0,0) έχουμε: $-e^{\lambda x_0}=\lambda\cdot e^{\lambda x_0}(-x_0) \Leftrightarrow -e^{\lambda x_0}=-\lambda\cdot e^{\lambda x_0}\cdot x_0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{\lambda}$ (2)

Τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $(1),(2) \Leftrightarrow y-e=\lambda\cdot e\left(x-\dfrac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-e=\lambda e x-e \Leftrightarrow y=\lambda e x$ και το σημείο επαφής $M\left(x_0, e^{\lambda x_0}\right)=M\left(\dfrac{1}{\lambda}, e\right)$

γ. Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|f(x)-\lambda ex\right|dx$

Είναι όμως $f''(x)=\lambda^2\cdot e^{\lambda x}>0$ δηλαδή η f είναι κυρτή στο IR οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη. Ισχύει λοιπόν $f(x)\geq \lambda ex \Leftrightarrow f(x)-\lambda ex\geq 0$ για κάθε $x\in$IR.

Άρα: $E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left|f(x)-\lambda ex\right|dx=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(f(x)-\lambda ex\right)dx=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}-\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=$

$$=\frac{e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}}{\lambda}-\lambda e\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{2}-\frac{e^0}{\lambda}=\frac{e}{\lambda}-\lambda e\frac{1}{2\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}=\frac{e}{\lambda}-\frac{e}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda}=\frac{2e-e-2}{2\lambda}=\frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. Είναι: $\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\frac{\lambda^2\frac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda}=\frac{\lambda\frac{e-2}{2}}{2+\eta\mu\lambda}=\frac{e-2}{2}\cdot\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}$

Γνωρίζουμε ότι: $-1\leq\eta\mu\lambda\leq 1\Leftrightarrow 1\leq 2+\eta\mu\lambda\leq 3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2+\eta\mu\lambda}\leq 1\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\frac{\lambda}{3}\leq\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}\leq\lambda$

Ισχύει: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{3}=+\infty$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda=+\infty$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής και

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$. Επίσης είναι $\frac{e-2}{2}>0$, οπότε τελικά $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{e-2}{2}\cdot\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}\right)=+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι: $2\cdot f'(x)=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow 2\cdot f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{e^x}{2}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\frac{e^x}{2}\right)'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{e^x}{2}+c$. Για x=0: $e^{f(0)}=\frac{e^0}{2}+c\Leftrightarrow e^0=\frac{e^0}{2}+c\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$.

Τελικά $e^{f(x)}=\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{e^x+1}{2}\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

β. Για το $\int_0^x f(x-t)dt$ θέτουμε $u=x-t$, οπότε $du=-dt\Leftrightarrow dt=-du$. Για $t=0\Rightarrow u=x$ και για $t=x\Rightarrow u=0$, οπότε: $\int_0^x f(x-t)dt=-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du$

Η f είναι συνεχής στο IR και 0∈IR επομένως η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο IR.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}\underset{\text{De L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=0$$

γ. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Για την h(x) έχουμε:

$$h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt=\int_{-x}^{\alpha} t^{2005}\cdot f(t)dt+\int_{\alpha}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt=-\int_{\alpha}^{-x} t^{2005}\cdot f(t)dt+\int_{\alpha}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt$$

Η $w(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα οι $\int_{\alpha}^{-x} t^{2005}\cdot f(t)dt$ και $\int_{\alpha}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ οπότε:

$$h'(x)=-(-x)^{2005}\cdot f(-x)\cdot(-x)'+x^{2005}\cdot f(x)=-x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)+x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)=$$

$$=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)+\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)\right]=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e^{x}}}\right)+\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)\right]=$$

$$=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right)+\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)\right]=x^{2005}\ln\left(\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\cdot\frac{1+e^{x}}{2}\right)=x^{2005}\ln e^{x}=x^{2006}$$

Για την g(x) έχουμε: $g'(x)=\left(\frac{x^{2007}}{2007}\right)'=\frac{2007\cdot x^{2006}}{2007}=x^{2006}$

Άρα $h'(x)=g'(x)$, οπότε $h(x)=g(x)+c$. Για x=0 έχουμε: $h(0)=g(0)+c \Leftrightarrow c=0$

Και τελικά h(x) = g(x) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Από το (γ) ερώτημα έχουμε: $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt=\frac{1}{2008}\Leftrightarrow\frac{x^{2007}}{2007}=\frac{1}{2008}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2008\cdot x^{2007}=2007\Leftrightarrow 2008\cdot x^{2007}-2007=0$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=2008\cdot x^{2007}-2007$, $x\in[0,1]$.

- Η φ(x) είναι συνεχής στο [0,1] και
- $\left.\begin{array}{l}\varphi(0)=-2007\\ \varphi(1)=2008-2007=1\end{array}\right\}\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση φ(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Όμως $\varphi'(x)=2008\cdot 2007\cdot x^{2006}>0$ για κάθε $x\in[0,1]$ συνεπώς η φ(x) είναι γν. αύξουσα

Άρα τελικά η εξίσωση φ(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο (0,1).