ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ – Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία
Α.2 Θεωρία ορισμός
Α.3 Θεωρία ορισμός

Β) α – Λ, β – Λ , γ – Λ , δ – Σ , ε – Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $|z| = \left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}\right| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$

β) Αν α=0, $z_1 = \dfrac{1}{i} = -i$

Αν α=2, $z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = 1$

i) $|z_1 - z_2| = |1+i| = \sqrt{2}$

ii) $\left.\begin{array}{l}(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = i^{2\nu} = (-1)^{\nu} \\ (-z_2)^{\nu} = (-1)^{\nu}\end{array}\right\}$ ισχύει

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta \qquad \theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

<u>ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ</u>

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 & \text{κρίσιμο σημείο} \\ x = 1 & \text{κρίσιμο σημείο} \end{cases}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0$

	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Τ.Μ το $f(-1) = -1 + 3 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1-\eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

Τ.Ε το $f(1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1+\eta\mu^2\theta)$

<u>ΚΟΙΛΑ – ΚΥΡΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ</u>

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$ πιθανό σημείο καμπής

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 6x>0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	$\bigcap$		$\bigcup$
		Σ.Κ.	

Άρα σημείο καμπής στο f(0)=-2ημ^{2}θ

β) Θα βρω τα όρια της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

- Αν $x\in A_1=(-\infty,-1]$: f γνησίως αύξουσα με $f(A_1)=(-\infty,2συν^2θ]$

Η f παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

- Αν $x\in A_2=[-1,1]$: f γνησίως φθίνουσα με $f(A_2)=[-2(1+ημ^2θ),2συν^2θ]$

Η f παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

- Αν $x\in A_3=[1,+\infty)$: f γνησίως αύξουσα με $f(A_3)=[-2(1+ημ^2θ),+\infty)$

Η f παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

γ) $A(-1,2συν^2θ)$

$B(1,-2-2ημ^2θ)$

$Γ(0,-2ημ^2θ)$

πρέπει τα σημεία να επαληθεύουν την ευθεία $y=-2x-2ημ^2θ$

για το Α: $2συν^2θ=-2\cdot(-1)-2ημ^2θ \Leftrightarrow ημ^2θ+συν^2θ=1$ <u>ισχύει</u>

για το Β: $-2-2ημ^2θ=-2-2ημ^2θ$ <u>ισχύει</u>

για το Γ: $-2ημ^2θ=-2ημ^2θ$ <u>ισχύει</u>

δ) Θα βρω τα κοινά σημεία των f, y

$f(x)=y \Leftrightarrow x^3-3x-2ημ^2θ=-2x-2ημ^2θ \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

$$E=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-y\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx$$

το πρόσημο της x^3-x είναι:

$-\infty$	-1	0	1
-	+	-	+

Άρα:

$$E=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx=[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0}+[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2]_{0}^{1}=$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-0=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Για κάθε $x>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)>0$

άρα $f(x)g(x)>0\ \forall x\in[0,1]$

β) Για 0<t<x$\le 1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(t)<f(x)\Leftrightarrow f(t)g(t)<f(x)g(t)\Leftrightarrow g(t)[f(x)-f(t)]>0$

άρα

$$\int_0^x g(t)[f(x)-f(t)]dt>0\Leftrightarrow\int_0^x g(t)f(x)dt-\int_0^x g(t)f(t)dt>0\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)dt>\int_0^x g(t)f(t)dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x)>F(x)$$

γ) θεωρώ $h(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ στο $(0,1]$

$$h'(x)=\frac{F'(x)G(x)-G'(x)F(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-g(x)F(x)}{G^2(x)}=\frac{g(x)[f(x)G(x)-F(x)]}{G^2(x)}>0$$

άρα h γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

$\forall x\le 1\Rightarrow h(x)\le h(1)$

$$\frac{F(x)}{G(x)}\le\frac{F(1)}{G(1)}$$

δ) $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt\cdot\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{\int_0^x g(t)dt\cdot x^5}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\right]$$

Όμως $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4\cdot2x}{5x^4}=\frac{2}{5}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot x\right)=0$$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt\cdot\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{\int_0^x g(t)dt\cdot x^5}=0$