ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ. 24-05-2008

ΘΕΜΑ 1
Α.1. Θεωρία
Α.2. Θεωρία

Β.α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2

α) $|(i+2\sqrt{2})\cdot z| = 6 \Leftrightarrow |i+2\sqrt{2}|\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+8}\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2.

β) $|w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$

Θέτω w=x+ψi. Τότε έχουμε : $|(x-1)+(\psi+1)i| = |(x-3)+(\psi+3)i|$

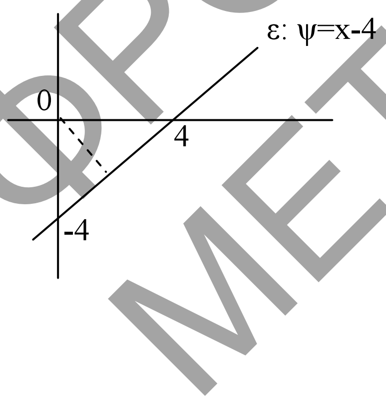
Άρα έχουμε $\sqrt{(x-1)^2+(\psi+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(\psi+3)^2} \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+\psi^2+2\psi+1=x^2-6x+9+\psi^2+6\psi+9 \Leftrightarrow$

$4x-4\psi-16=0 \Leftrightarrow x-\psi-4=0 \Leftrightarrow \psi=x-4$

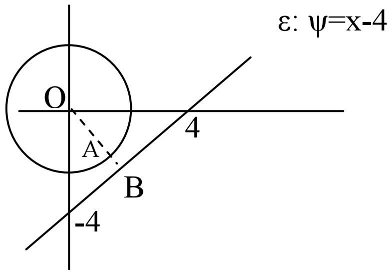
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ευθεία (ε):ψ=x-4

γ) Το $|w|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση της εικόνας του w από το Ο(0,0)



Άρα $|w|_{min}=d(O,\varepsilon)=\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

δ)Το $|z-w|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα w.



Επειδή $|w|>R$ η ευθεία είναι εξωτερική του C.

$|z-w|_{min}$=AB=(OB)-(OA)=$2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$

ΘΕΜΑ 3

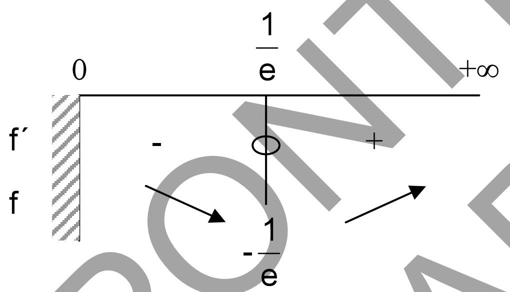
α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

f(0)=0

Άρα f συνεχής στο $x_0=0$

β) Για κάθε x>0: f(x)=xlnx με f΄(x)=lnx+1

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>e^{-1}$



Ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$

Θα υπολογίσω το όριο της f στο $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$

Άρα $R_f=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

γ) $x=e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$

($Π_1$) Αν $α<-\frac{1}{e}$: η εξίσωση είναι αδύνατη

($Π_2$) Αν $α=-\frac{1}{e}$: η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x_0=\frac{1}{e}$

($Π_3$) Αν $-\frac{1}{e}<α<0$: η εξίσωση έχει δύο θετικές ρίζες. (μία σε καθένα από τα διαστήματα $(0,\frac{1}{e})$ και $(\frac{1}{e},+\infty)$)

($Π_4$) Αν α≥0 : η εξίσωση έχει ρίζα το 0 (απορρίπτεται) και μοναδική θετική ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{e}, +\infty)$

δ) Στο [x, x+1] με x>0 η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ στο (x, x+1) : $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\ \forall x>0$ άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, $+\infty$).

Τότε $\xi<x+1 \Leftrightarrow f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$

ΘΕΜΑ 4

α) $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45$

Τότε $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left[(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt\right]dx-\int_0^2 45dx$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(t)dt\int_0^2(10x^3+3x)dx-90$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx\left[\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-90$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx\cdot 46-90$

$45\int_0^2 f(x)dx=90 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx=2$

Τότε $f(x)=(10x^3+3x)2-45$

$f(x)=20x^3+6x-45$

β) $\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x-h)-g'(x)}{-h}\overset{u=-h}{=}\lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}=g''(x)$

γ)

i) $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=$

$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{2h}-\frac{g'(x-h)-g'(x)}{2h}\right]=\frac{g''(x)}{2}+\frac{g''(x)}{2}=g''(x)$

Άρα $g''(x)=f(x)+45$

$g''(x)=20x^3+6x$

Άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+α$

$g(x)=x^5+x^3+αx+β$

Όμως $g'(0)=1 \Leftrightarrow α=1$

$g(0)=1 \Leftrightarrow β=1$

Τελικά $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii) $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0\ \forall x\in R$ άρα g γνησίως αύξουσα και 1 – 1