ΘΕΜΑ 4ο

α.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση F , με $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο [0 , 2] , άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 2] με $F'(x)=f(x)$.
- Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση f_1 με $f_1(x)=x\cdot f(x)$. Η f_1 είναι συνεχής στο [0 ,2] ως γινόμενο συνεχών , άρα η H είναι παραγωγίσιμη στο [0 , 2] με $H'(x)=x\cdot f(x)$.

  - Η συνάρτηση G , με $G(x)=\dfrac{H(x)}{x}-F(x)+3$ είναι συνεχής στο (0 , 2] ως πράξεις συνεχών (πηλίκο-άθροισμα – ολοκλήρωμα συνεχούς) **(1)** .
  - στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}G(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{H(x)}{x}-F(x)+3\right]=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)}{x}-\lim_{x\to0^+}(F(x)+3)=$$
$$=0-F(0)+3=3 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x t\cdot f(t)dt}{x}\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot f(x)}{1}=0\cdot f(0)=0$$

$$G(0)=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim_{x\to0}\frac{6(1-\sqrt{1-t^2})(1+\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=\lim_{x\to0}\frac{6}{1+\sqrt{1-t^2}}=3 \qquad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε $\lim_{x\to o^+}G(x)=G(0)$, άρα η G είναι συνεχής στο $x_0=0$ **(4)** . Από (1) και (4) προκύπτει ότι **η G είναι συνεχής στο [0 , 2]** .

β. Για x ∈ (0 , 2) η G είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων

$$G'(x)=\left[\frac{H(x)}{x}-F(x)+3\right]'=\left[\frac{H(x)}{x}\right]'-F'(x)$$
$$=\left[\frac{H(x)}{x}\right]'-F'(x)=\frac{H'(x)x-H(x)}{x^2}-f(x)$$
$$=\frac{x^2f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2}.$$

γ. (1ος τρόπος)

Θα εφαρμόσουμε Θ. Rolle για την G στο [0,2]

- η G είναι συνεχής στο [0 , 2]
- η G είναι παραγωγίσιμη στο (0 , 2) με $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}$
- $\begin{cases} G(0)=3 \\ G(2)=\dfrac{H(2)}{2}-F(2)+3=3 \end{cases}$, διότι $\int_0^2(t-2)f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^2[t\cdot f(t)-2f(t)]dt=0\Leftrightarrow$ $\int_0^2 t\cdot f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt=0\Leftrightarrow\dfrac{H(2)}{2}-F(2)=0$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον α ∈ (0 , 2) ώστε $G'(\alpha)=0\Leftrightarrow-\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow H(\alpha)=0$.

ος τρόπος)

Με άτοπο: Αν $H'(x) \neq 0 \Leftrightarrow G'(x) \neq 0$ στο $(0,2)$ και αφού η G' είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$, οπότε η G θα είναι γνησίως μονότονη στο $[0,2]$.

Έχουμε $0 < 2 \Rightarrow \begin{cases} G(0) < G(2) \\ \text{ή} \\ G(0) > G(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < 3 \\ \text{ή} \\ 3 > 3 \end{cases}$

Οπότε είτε είναι αύξουσα είτε φθίνουσα καταλήγουμε σε άτοπο.

δ. Θα εφαρμόσουμε Θ. Μ.Τ. για την G στο $[0,2]$

- η G είναι συνεχής στο $[0 , \alpha]$
- η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , \alpha)$ με $G'(x) = -\dfrac{H(x)}{x^2}$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0 , \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \underset{H(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} -\frac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt.$$