Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2012

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ.253
Α.2. Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 191
Α.3 Σχολ. Βιβλίο, Θεωρία, σελ. 258
Α.4. α. $\rightarrow$ **Σ** **β.** $\rightarrow$ **Σ** **γ.** $\rightarrow$ **Λ** **δ.** $\rightarrow$ **Λ** **ε.** $\rightarrow$ **Λ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1. α΄ τρόπος:
Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, η σχέση (1) γράφεται:
$|(x-1)+yi|^2 + |(x+1)+yi|^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$. Συνεπώς $|z| = 1$.

β΄ τρόπος:
Η σχέση (1) γράφεται: $(z-1)\cdot\overline{(z-1)} + (z+1)\cdot\overline{(z+1)} = 4 \Leftrightarrow (z-1)\cdot(\bar{z}-1) + (z+1)\cdot(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$
$z\cdot\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\cdot\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2\cdot z\cdot\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.
Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

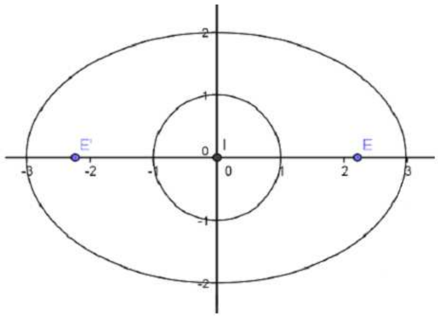
Β.2.

- Είναι $|z_1| = 1$ και $|z_2| = 1$
- $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2 = 0$
- $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\cdot(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \ldots = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2) = 2$
  Άρα, $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

Β.3. Έστω $w = x + yi$

Είναι: $|w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι έλλειψη με μήκος μεγάλου ημιάξονα $\alpha = 3$ και μήκος μικρού ημιάξονα $\beta = 2$.
Αν A', B, B', B οι κορυφές της έλλειψης, τότε: $A'(-3,0), B(3,0), B'(0,-2), B(0,2)$.

- Έστω $M(w)$ η εικόνα του w. Είναι $\beta \le (OM) \le \alpha \Leftrightarrow 2 \le (OM) \le 3$. Άρα, $2 \le |w| \le 3$.
  Επομένως $|w|_{max} = (OA) = (OA') = 3$ και $|w|_{min} = (OB) = (OB') = 2$.



Β.4. α΄ τρόπος:
Με τη βοήθεια του σχήματος προκύπτει ότι:

$$\max|z-w| = (\text{ΑΓ}') = 4$$

$$\min|z-w| = (\text{ΒΔ}) = 1$$

β΄ τρόπος:
Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας και επειδή $|z-w| = |w-z|$ έχουμε:

$$\big||w|-|z|\big| \le |w-z| \le |w|+|z| \Leftrightarrow \big||w|-1\big| \le |w-z| \le |w|+1 \qquad (4)$$

Όμως από **Β3** προκύπτει: $2 \le |w| \le 3$,

Άρα $|w|-1 \ge 1$ και $|w|+1 \le 4$. Τότε η (4) γράφεται: $1 \le |w-z| \le 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x}$, $x>0$.

Είναι $f'(1) = 0$ (προφανής λύση)

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x>0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, συνεπώς η προφανής λύση είναι μοναδική.
Οπότε για $0<x<1$ ισχύει $f'(x) < f'(1) = 0$ και για $x>1$ ισχύει $f'(x) > f'(1) = 0$.
Επομένως προκύπτει ο πίνακας των μεταβολών:

Άρα, η f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$ και f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2[1,+\infty)$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[(x-1)\ln x - 1] = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)\ln x - 1] = +\infty$.

- Η f είναι συνεχής στο $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως φθίνουσα. Άρα, $f(\Delta_1) = [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [-1,+\infty)$.
- Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα. Άρα, $f(\Delta_2) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [-1,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$.

Γ2. Για $x>0$: $x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln(x^{x-1}) = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow f(x) = 2012$.
Το $2012 \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1): f(x_1) = 2012$ (από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών) (όπου x_1 μοναδικό αφού f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1)
Ομοίως ...$f(x_2) = 2012$. Άρα, η εξίσωση έχει 2 ακριβώς λύσεις.

Γ.3. α΄ τρόπος:
Θα δειχθεί ότι: $f'(x) + f(x) = 2012$ για $x = x_0 \in (x_1, x_2)$ **ή**

$e^x f'(x) + e^x f(x) = 2012e^x$ για $x = x_0 \in (x_1, x_2)$ **ή**

$(e^x f(x) - 2012e^x)' = 0$ για $x = x_0 \in (x_1, x_2)$

Έστω $g(x) = e^x f(x) - 2012e^x$ για $x \in [x_1, x_2]$

- g συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- g παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $g'(x) = ...$
- $g(x_1) = e^{x_1}(f(x_1) - 2012) = 0$ από Γ2 και $g(x_2) = e^{x_2}(f(x_2)2012) = 0$ από Γ2

Από Θεώρημα Rolle: υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2): g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

β΄ τρόπος:

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f'(x)+f(x)-2012$, $x\in[x_1,x_2]$

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $g(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012=f'(x_1)<0$ γιατί $f(x_1)=2012$ και $f'(x_1)<0$ για $x_1\in\Delta_1$.
- $g(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012=f'(x_2)>0$ γιατί $f(x_2)=2012$ και $f'(x_2)>0$ για $x_2\in\Delta_2$.
  Τότε, $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

Γ4. Είναι $g(x)=(x-1)\ln x$ συνεχής στο $(0,+\infty)$.

- $g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x=0\Leftrightarrow x=1$
- $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$, άρα
  $$E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx\Leftrightarrow E=\int_1^e\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]'\ln x dx=\ldots\ldots=\frac{e^2-3}{4}$$
  Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- f συνεχής με $f(x)\neq 0$ για $x>0$. Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.
- Αν $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$, $x>0$ τότε $\left.\begin{array}{l} g(x)\geq 0 \quad \text{για κάθε } x>0 \\ g(1)=0\end{array}\right\}$ Άρα $x_0=1$ θέση ελαχίστου.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $g'(x)=(2x-1)f(x^2-x+1)-\frac{1}{e}(1-2x)$ για $x>0$.

Άρα $g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$ (Θεώρημα Fermat) οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x>0$.

* Για $x>0$ έχουμε:

$$\ln x-x=-\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)|f(x)|\Leftrightarrow \ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)\Leftrightarrow\frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e.$$

Τότε: $\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt\right)'=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ ή

$\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)'=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\Leftrightarrow\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e=ce^x$, $x>0$.(εφαρμογή σχολικού σελ. 252)

Για $x=1$, $e=c\cdot e\Leftrightarrow c=1$. Άρα $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e=e^x$ τότε

$\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)'=(e^x)'\Leftrightarrow\frac{\ln x-x}{f(x)}=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$. Άρα, η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ **ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.**

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[e^{-x}(\ln x - x)] = -\infty$. Θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = u$. Όταν $x \to 0^+$ το $u \to 0^-$. Τότε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} = \lim_{u\to 0^-}\frac{(\eta\mu u - u)'}{(u^2)'} = \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} =$$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$ εφαρμόζοντας κανόνα De L΄ Hospital γιατί ισχύουν οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Είναι: $F'(x) = f(x) < 0$ για $x > 0$. (Είναι $f(x) < 0$ αφού $\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \le -1$)

$$F''(x) = f'(x) = e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x} + x - 1\right) = e^{-x}\left[\left(\underbrace{x - 1 - \ln x}_{\geq 0}\right) + \frac{1}{x}\right] > 0 \ , x > 0$$

Άρα F κυρτή στο $(0,+\infty)$ και F' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Από $F(x) + F(3x) > 2F(2x) \Leftrightarrow F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x)$, προκύπτει: $\frac{F(3x) - F(2x)}{x} > \frac{F(2x) - F(x)}{x}$

για $x > 0$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στα $[x, 2x], [2x, 3x]$ οπότε υπάρχουν:

$\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ με $F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$ και $F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$ αντίστοιχα.

Είναι $\xi_1 < \xi_2$ και F' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Συνεπώς έχουμε:

$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \Leftrightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x).$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$, $x \in [\beta, 2\beta]$ όπου $\beta > 0$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ (από το **Δ3** για $x = \beta$)
  $h(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$ (διότι $\beta < 3\beta$ και F γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, αφού $F'(x) = f(x) < 0$ για $x > 0$. Συνεπώς $F(\beta) > F(3\beta)$). Άρα $h(2\beta)\cdot h(\beta) < 0$.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.

Είναι $h'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\beta, 2\beta]$, συνεπώς "1−1" και επομένως το ξ είναι μοναδικό.