x	-3/2		-1		0		+∞
φ΄(x)		+	0	-	0	+	
φ(x)		↗		↘		↗	

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\varphi(-1) = -1$ και τοπικό ελάχιστο $\varphi(0) = -2$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της φ για $x \in [0, +\infty)$ είναι το $[-2, +\infty)$, ενώ για $x < 0$ είναι $\varphi(x) < 0$.
Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την φ στο $(0, +\infty)$ και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Θέτουμε $K(x) = \int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{εφ}x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ενώ επειδή $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

θα είναι $\int_{-\pi/4}^{0} f(t)dt > 0$, δηλαδή $K(0) > 0$.

Επίσης είναι $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) \cdot \text{εφ}\frac{\pi}{4} = -1 < 0$.

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$ ή $\int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[5\frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h}\right] =$$

$= 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1)$.

διότι

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1)}{5h}\cdot 5 \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{5h=u}{=}} 5\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u) - f(1)}{u} = 5f'(1)$.
- $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-h=t}{=}} -\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'(1)$.

Άρα αφού

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$.

Για $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$.

Για $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1, +\infty)$ με $f'(1) = 0$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$.

Δ2. Είναι $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}, \quad x \in (0,+\infty)$.

Λόγω του Δ_1,. αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο, είναι $f(x) \ge f(1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Έτσι $f(x) - 1 > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $x - 1 > 0$, άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u)du,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$.

Όμως $x < x + 1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x + 1)$,

άρα $\varphi'(x) > 0$, άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η δοσμένη ανίσωση γράφεται: $\varphi(8x^2+5) > \varphi(2x^4+5) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

Δ3. Είναι $g''(x = \dfrac{(f(x)-1)'(x-1)-(f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Για την f στο $[1, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (1,x): \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi) \Rightarrow \dfrac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi)$.

Άρα $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$.

Είναι $\xi < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.

Επίσης για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Έτσι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \overset{a>1}{\Longleftrightarrow} g(x) = \dfrac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x = \alpha$ είναι

$y - g(a) = g'(a)(x-a) \overset{g(a)=0}{\Longleftrightarrow} y = g'(a)(x-a)$.

Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x) \ge y \Rightarrow g(x) \ge g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha$.