ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΛΥΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 251

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ 273

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 150

Α4.
α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-21=0 \Leftrightarrow$$

$$2|z|^2+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow$$

$$2(|z|^2-2)+2(x-1)i=0 \Leftrightarrow$$

$$2(|z|^2-2)=0 \text{ και } 2(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}|z|^2=2=x^2+y^2\\ \text{x=1}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c}y^2=1\\ x=1\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}x=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad y=1\\ \acute{\eta}\\ x=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad y=-1\end{array} \Leftrightarrow$$

$$z_1=1+i \text{ και } \mathrm{z}_2=1-i$$

Β2.

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\frac{(1+i)^2}{1^2+1^2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{39}=3i^{39}=$$

$$=3i^{4\cdot 9+3}=3i^3=3i^2i=-3i$$

Β3.

$|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow$

$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow$

$|u-3i|=|4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow$

$|u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow$

$|u-3i|=5 \Leftrightarrow$

$|u-(0+3i)|=5 \Leftrightarrow$

(MK)=5

Οπότε το σημείο M κινείται σε κύκλο (K,5) κέντρου K(0,3).

ΘΕΜΑ Γ

$h(x)=x-\ln(e^x+1)$

Γ1.

$h'(x)=(x-\ln(e^x+1))'=x'-(\ln(e^x+1))'=$

$1-\frac{1}{e^x+1}(e^x+1)'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$

$h''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η h(x) είναι κοίλη.

Γ2.

Παρατηρούμε πως

$h(1)=1-\ln(e^1+1)=\ln e-\ln(e+1)=\ln\frac{e}{e+1}$

Οπότε:

$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$

$\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$

$h(2h'(x))<h(1) \overset{h\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$2h'(x)<1 \Leftrightarrow$

$h'(x)<\frac{1}{2}=h'(0) \overset{h'\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$x>0$

Αφου h κοίλη στο R, h΄γνησια φθινουσα στο R

Γ3.

Για την οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ έχουμε

$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(e^x+1))=\lim_{x\to+\infty}(\ln e^x-\ln(e^x+1))=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

Αν $u=\frac{e^x}{e^x+1}$, $u\to 1$ αν $x\to +\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

άρα

$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$, δηλαδή έχει οριζόντια την y=0

Για την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$, της μορφής $y=ax+\beta$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x})=\lim_{x\to-\infty}(1-\ln(e^x+1)\frac{1}{x})=1-0=1=a$$

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}(-\ln(e^x+1))=0=\beta$$

Οπότε έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την y=x

Γ4.

Βρίσκουμε που η φ(x) τέμνει τον x΄x.

$\phi(x)=0\Leftrightarrow$

$e^x(h(x)+\ln 2)=0\overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$h(x)+\ln 2=0\Leftrightarrow$

$h(x)=-\ln 2\Leftrightarrow$

$h(x)=h(0)\underset{h\ 1-1}{\overset{h\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow}{\Leftrightarrow}}$

$x=0$

Είναι $h\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow h(x)>h(0)\Rightarrow h(x)>-\ln 2\Rightarrow h(x)+\ln 2>0$

Οπότε για το εμβαδόν έχουμε

$$E=\int_0^1|e^x(h(x)+\ln 2)|\,dx=\int_0^1 e^x(\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2)dx=$$

$$=\int_0^1 e^x\ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx \underset{\substack{g(1)=e^1=e\\ g(0)=e^0=1\\ du=e^x dx}}{\overset{\text{Αν } u=e^x=g(x)}{=}} \int_1^e\ln\frac{2u}{u+1}du=\int_1^e(\ln 2u-\ln(u+1))du=$$

$$=\int_1^e\ln 2u\,du-\int_1^e\ln(u+1)du=I_1-I_2$$

$$I_1=\int_1^e\ln 2u\,du=\frac{1}{2}\int_1^e(2u)'\ln 2u\,du=\frac{1}{2}([2u\ln u]_1^e-\int_1^e 2u\frac{1}{2u}(2u)'du)=$$

$$=\frac{1}{2}(2e\ln(2e)-2\ln 2-\int_1^e 2du)=e\ln(2e)-\ln 2-[u]_1^e=e\ln(2e)-\ln 2-e+1$$

$$I_2=\int_1^e \ln(u+1)du=\int_1^e (u+1)'\ln(u+1)du=[(u+1)\ln(u+1)]_1^e-\int_1^e (u+1)\frac{1}{u+1}(u+1)'du=$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-(1+1)\ln(1+1)-\int_1^e 1du=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-[u]_1^e=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1$$

Άρα

$$E=I_1-I_2=e\ln(2e)-\ln 2-e+1-((e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1)=$$

$$=eln(2e)-\ln 2-e+1-e\ln(e+1)-\ln(e+1)+2\ln 2+e-1=$$

$$=e(\ln(2e)-\ln(e+1))-[\ln(e+1)-\ln 2]=$$

$$=e\ln\frac{2e}{e+1}-\ln\frac{e+1}{2}=$$

$$=\ln\frac{\left(\frac{2e}{e+1}\right)^e}{\frac{e+1}{2}}=\ln\left[\left(\frac{2}{e+1}\right)^{e+1}e^e\right]$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & , \quad x\neq 0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$$

Δ1.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\text{Απροσδιόριστη μορφή } \frac{0}{0}}{\underset{De \text{ L'Hopital}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1=f(0)$$

Οπότε η f(x) είναι συνεχής στο x=0

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{(e^x-1)'x-(e^x-1)x'}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

Θέτουμε $g(x)=xe^x-e^x+1$

Οπότε

$$g'(x)=(xe^x-e^x+1)'=x'e^x+x(e^x)'-e^x=xe^x$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow xe^x\overset{e^x\neq 0}{=}0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
g΄(x)	- 0 +	
g(x)	↘	↗

Δηλαδή η g(x) παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x=0 το g(0)=0, συνεπώς

$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow xe^x-e^x+1\geq 0$.το ισον ισχυει αν x=0

Άρα $f'(x)>0$ αφού $xe^x-e^x+1>0$ και $x^2>0$ για $x\neq 0$ και

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}>0$$

οπότε $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού f είναι και συνεχής στο x=0.

Δ2.
(α)

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0 \Leftrightarrow F(2f'(x))-F(1)=0 \Leftrightarrow F(2f'(x))=F(1)$$

Όπου F μία αρχική της f, οπότε

$$F'(x)=f(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
e^x-1	- 0 +
x	- 0 +
f(x)	+ 0 +

$f(x)>0\ ,\ \forall x\neq 0$

$f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0\ ,\ \forall x\in\Re$

Άρα F γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και 1-1 άρα:

$$F\left(2f'(x)\right)=F(1)\overset{F\ :\ 1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}=f'(0)\Leftrightarrow x=0$$

Αφού f κυρτή είναι $f'\nearrow$ και $x=0$ μοναδική λύση.

(β)
Ισχύει ότι:

$$y(t_0)=f\left(x(t_0)\right)$$

$$y'(t)=\left(f\left(x(t)\right)\right)'=f'\left(x(t)\right)\cdot x'(t)\overset{x'(t)=2y'(t)}{=}f'(x(t))2y'(t)$$

Για t=t_0

$$y'(t_0)=f'(x(t_0))2y'(t_0)$$

$1=2f'\left(x(t_0)\right)$ αφού $x'(t_0)=2y'(t_0)>0$

$$f'\left(x(t_0)\right)=\frac{1}{2}=f'(0)\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x(t_0)=0$$

Και επομένως το σημείο είναι:

$$\mathrm{M}\left(x(t_0), f\left(x(t_0)\right)\right)$$

$$\mathrm{M}\left(0, f(0)\right)$$

$$\mathrm{M}(0,1)$$

Δ3.

$$g(x) = \left(xf(x)+1-e\right)^2 (x-2)^2, \quad \mathrm{x} \in (0,+\infty)$$

$$g(x) = \left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2 (x-2)^2 = \left(e^x-e\right)^2 (x-2)^2$$

$$g'(x) = 2\left(e^x-e\right)\left(e^x-e\right)'(x-2)^2 + 2(x-2)\left(e^x-e\right)^2 =$$

$$= 2\left(e^x-e\right)e^x(x-2)^2 + 2(x-2)\left(e^x-e\right)^2 =$$

$$= 2(x-2)\left(e^x-e\right)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right] =$$

$$= 2(x-2)\left(e^x-e\right)\left[e^x(x-1)-e\right]$$

Θέτουμε $\phi(x) = e^x(x-1)-e$, $\mathrm{x} \in (0,+\infty)$

$\phi'(x) = xe^x > 0$ άρα φ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- $\phi(1) = -e < 0$
- $\phi(2) = e^2 - e = e(e-1) > 0$

Ακόμα, φ συνεχής στο $[1,2]$

Άρα από Θ. Bolzano

$\exists x_0 \in (1,2) : \phi(x) = 0$

και $\phi \nearrow [0,+\infty)$ οπότε το x_0 είναι μοναδικός

$$x > x_0 \overset{\phi\nearrow}{\Rightarrow} \phi(x) > \phi(x_0) = 0$$

$$x < x_0 \overset{\phi\nearrow}{\Rightarrow} \phi(x) < \phi(x_0) = 0$$

x	0 1 x_0 2 $+\infty$
$2(e^x-e)$	- 0 + | + | +
x-2	- | - | - 0 +
φ(x)	- | - 0 + | +
g΄	- 0 + 0 – 0 +
g	↘ | ↗ | ↘ | ↗
	Τ.Ε. Τ.Μ. Τ.Ε.

Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο στα x=1 και x=2 και τοπικό μέγιστο στο $x = x_0$