Δ 2Β.
Επειδή

i. η f′ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)
ii. $f'(x)\neq 0$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$ (από Δ2α)
(από i & ii έχουμε ότι η f′ διατηρεί πρόσημο ως συνεχής και διάφορη του μηδενός)
iii. f′(0) = 1 > 0

Από i, ii,iii προκύπτει f′(x) > 0 οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Ισχύει ότι $\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\eta\mu x}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0$. Ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0+0=0$

Δ4. Για το $\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx$ θέτουμε $\ln x=u\Rightarrow\frac{1}{x}dx=du$

Για x=1 είναι $u=\ln 1=0$ ενώ για $x=e^\pi$ είναι $u=\ln e^\pi=\pi$,

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται $\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi f(u)du$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,π] και γνησίως αύξουσα άρα

$0\le u\le\pi\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(u)\le\pi$.

Άρα $f(u)\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για u=0, οπότε $\int_0^\pi f(u)>0$ (1).

Επίσης $\pi-f(u)\ge 0$ και η συνάρτηση $\pi-f(u)$ είναι συνεχής στο [0,π] και δεν μηδενίζεται παντού, αλλά μόνο στο x=π.

Άρα $\int_0^\pi(\pi-f(u))du>0\Leftrightarrow\int_0^\pi\pi>\int_0^\pi f(u)du\Leftrightarrow\int_0^\pi f(u)du<\pi(\pi-0)=\pi^2$ (2).

Επομένως από (1),(2) προκύπτει $0<\int_0^\pi f(u)du<\pi^2$.