ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ 19/6/2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο Σελ. 31
Α2. Σχολικό βιβλίο Σελ. 14
Α3. Σχολικό βιβλίο Σελ 72

Α4.
Α) Σ, Β) Λ, Γ) Λ, Δ)Σ, Ε)Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1α.
Στην παραπάνω κατανομή συχνοτήτων η μέση τιμή $\left(\bar{x}\right)$ ορίζεται ισοδύναμα από την σχέση

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \dfrac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 1}{10} = \dfrac{40}{10} = 4$ όπου $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 10$ το μέγεθος του δείγματος.

Β1β.
Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός $\left(v = 10\right)$. Θα διατάξουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά.
1, 1, 3, 3,3, 5, 5, 5,5, 9
Η διάμεσος (δ) είναι το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων παρατηρήσεων $\delta = \dfrac{x_5 + x_6}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Β1γ.
Στον παραπάνω πίνακα συχνοτήτων η διακύμανση $\left(S^2\right)$ ορίζεται από τη σχέση

$$S^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot v_i = \frac{1}{10}\left[\left(1-4\right)^2 \cdot 2 + \left(3-4\right)^2 \cdot 3 + \left(5-4\right)^2 \cdot 4 + \left(9-4\right)^2 \cdot 1\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left(9 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 25 \cdot 1\right) = \frac{50}{10} = 5$$

Β2.

Αρχικά υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση S $\quad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{5}$

$$cv = \frac{S}{|\bar{X}|} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > 0{,}1 \cdot 100 = 10\%$$

Το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

Έχουμε $f'(x) = (x^2 - x + 1)' \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 1 \quad x \in \Re$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \qquad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Επομένως για $x > \frac{1}{2}$ τότε $f'(x) > 0$ και για $x < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{1}{2}$ $f'(x) < 0$

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
f′	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο Ε	

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$ για $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα ενώ για $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Στη θέση $x_0 = \frac{1}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Γ2.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Α(2, f(2)) $\quad$ $f(2)=2^2-2+1=3$ τότε Α(2, 3)

Η εξίσωση εφαπτομένης της c_f έχει τύπο (ε): ψ=λx+β με $\lambda = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ τότε $(\varepsilon): \psi = 3\chi + \beta$. Το $A(2,3)$ ανήκει στην ευθεία (ε) τότε $3 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$

Συνεπώς $(\varepsilon): \psi = 3\chi - 3$ στο $A(2,f(2))$

Γ3. Για να τέμνει η $\psi = 3\chi - 3$ τον x′ x θα πρέπει $\psi = 0 \Leftrightarrow 3\chi - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\chi = 3 \Leftrightarrow \chi = 1$
Η (ε) τέμνει τον x′x στο Β(1,0). Για να τέμνει η $\psi = 3\chi - 3$ τον ψ′ψ θα πρέπει x=0, $\psi = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow \psi = -3$. Η (ε) τέμνει τον ψ′ψ στο σημείο Γ(0,-3)

Γ4.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Βρίσκουμε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

1^{η} επιλογή 2^{η} επιλογή   Στοιχεία Ω

(ασπρη(α)) → α, μ, κ   αα, αμ, ακ

(μαύρη(μ)) → α, μ, κ   μα, μμ, μκ

(κοκκινη(κ)) → α, μ, κ   κα, κμ, κκ

Άρα

$\Omega=\{αα, αμ, ακ, μα, μμ, μκ, κα, κμ, κκ\}$

Παρατήρηση: (Από άσκηση 1 Σχολικό Βιβλίο σελ 144- Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση)

Δ2.

Ενδεχόμενα

$\{A=αμ, κμ, μμ\}$

$\{B=αμ, ακ, μα, μκ, κμ, κα\}$

Δ3α.

Τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα

Συνεπώς $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ $\quad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

α) Η πιθανότητα του Α΄ είναι $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$A\cap B=\{αμ,κμ\}$ με $P(A\cap B)=\frac{N\left(A\cap B\right)}{N(\Omega)}=\frac{2}{9}$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{3}{9}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ και

$P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{6}{9}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Δ3β.

Από ερώτημα Δ1 έχουμε ότι Α={αμ, μμ, κμ}. Εφόσον Γ ασυμβίβαστο με το Α. Δηλαδή $A\cap \Gamma=\varnothing$ το Γ μπορεί να είναι: Γ= {αα, ακ, μα, μκ, κα, κκ} .

Το Γ είναι και ασυμβίβαστο με το Β={αμ, ακ, μα, μκ, κα, κμ} δηλαδή πρέπει $\Gamma\cap B=\varnothing$

Συνεπώς το ενδεχόμενο Γ μπορεί να είναι το Γ={αα, κκ} με την μεγαλύτερη τιμή

$P\left(\Gamma\right)=\frac{N\left(\Gamma\right)}{N\left(\Omega\right)}=\frac{2}{9}$

Αυτό συμβαίνει διότι το ενδεχόμενο Γ μπορεί να είναι κάποιο από τα εξής:

$\varnothing$, {αα ,κκ} , {α, α} {κ, κ}