

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ 19/6/2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο Σελ. 31

A2. Σχολικό βιβλίο Σελ. 14

A3. Σχολικό βιβλίο Σελ. 72

A4.

A) Σ, Β) Λ, Γ) Λ, Δ) Σ, Ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1α.

Στην παραπάνω κατανομή συχνοτήτων η μέση τιμή (\bar{x}) ορίζεται ισοδύναμα από την σχέση

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 1}{10} = \frac{40}{10} = 4 \text{ όπου } v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 10 \text{ το μέγεθος του}$$

δείγματος.

B1β.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός ($v = 10$). Θα διατάξουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά.

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9

Η διάμεσος (δ) είναι το ημίαθροισμα των δυο μεσαίων παρατηρήσεων $\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$

B1γ.

Στον παραπάνω πίνακα συχνοτήτων η διακύμανση (S^2) ορίζεται από τη σχέση

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{10} \left[(1-4)^2 \cdot 2 + (3-4)^2 \cdot 3 + (5-4)^2 \cdot 4 + (9-4)^2 \cdot 1 \right] = \\ = \frac{1}{10} (9 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 25 \cdot 1) = \frac{50}{10} = 5$$

B2.

Αρχικά υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{5}$

$$cv = \frac{S}{|\bar{X}|} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > 0,1 \cdot 100 = 10\%$$

Το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έχουμε $f'(x) = (x^2 - x + 1)' \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Επομένως για $x > \frac{1}{2}$ τότε $f'(x) > 0$ και για $x < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{1}{2} f'(x) < 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	-	○	+
f	↘		↗

Ο Ε

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$ για $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα ενώ για

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ είναι γνησίως αύξουσα} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Στη θέση } x_0 = \frac{1}{2} \text{ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Γ2.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής $A(2, f(2)) \quad f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$ τότε $A(2, 3)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της c_f έχει τύπο (ε): $\psi = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ τότε

$$(ε): \psi = 3x + \beta. \text{ Το } A(2,3) \text{ ανήκει στην ευθεία (ε) τότε } 3 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

Συνεπώς (ε): $\psi = 3x - 3$ στο $A(2, f(2))$

Γ3. Για να τέμνει η $\psi = 3x - 3$ τον x' θα πρέπει $\psi = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Η (ε) τέμνει τον x' στο $B(1,0)$. Για να τέμνει η $\psi = 3x - 3$ τον ψ' θα πρέπει $x=0$,

$$\psi = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow \psi = -3. \text{ Η (ε) τέμνει τον } \psi' \text{ στο σημείο } \Gamma(0, -3)$$

Γ4.

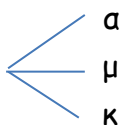
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} \right) =$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{1}{2}$$

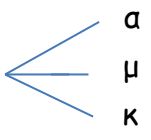
ΘΕΜΑ Δ


Δ1.

Βρίσκουμε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

1^η επιλογή 2^η επιλογή Στοιχεία Ω

(ασπρη(α))  α
μ
κ αα, αμ, ακ

(μαύρη(μ))  α
μ
κ μα, μμ, μκ

(κοκκινη(κ))  α
μ
κ κα, κμ, κκ

Άρα

$$\Omega = \{αα, αμ, ακ, μα, μμ, μκ, κα, κμ, κκ\}$$

Παρατήρηση: (Από άσκηση 1 Σχολικό Βιβλίο σελ 144- Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση)

Δ2.

Ενδεχόμενα

$$\{A = αμ, κμ, μμ\}$$

$$\{B = αμ, ακ, μα, μκ, κμ, κα\}$$

Δ3α.

Τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα

$$\text{Συνεπώς } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

α) Η πιθανότητα του A' είναι $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$A \cap B = \{\alpha\mu, \kappa\mu\} \quad \text{με } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \quad \text{και}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Δ3β.

Από ερώτημα Δ1 έχουμε ότι $A = \{\alpha\mu, \mu\mu, \kappa\mu\}$. Εφόσον Γ ασυμβίβαστο με το A . Δηλαδή $A \cap \Gamma = \emptyset$ το Γ μπορεί να είναι: $\Gamma = \{\alpha\alpha, \alpha\kappa, \mu\alpha, \mu\kappa, \kappa\alpha, \kappa\kappa\}$.

Το Γ είναι και ασυμβίβαστο με το $B = \{\alpha\mu, \alpha\kappa, \mu\alpha, \mu\kappa, \kappa\alpha, \kappa\mu\}$ δηλαδή πρέπει $\Gamma \cap B = \emptyset$

Συνεπώς το ενδεχόμενο Γ μπορεί να είναι το $\Gamma = \{\alpha\alpha, \kappa\kappa\}$ με την μεγαλύτερη τιμή

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$$

Αυτό συμβαίνει διότι το ενδεχόμενο Γ μπορεί να είναι κάποιο από τα εξής:

$\emptyset, \{\alpha\alpha, \kappa\kappa\}, \{\alpha, \alpha\}, \{\kappa, \kappa\}$